

193

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG

VON

K. KNOPP
BERLIN

E. SCHMIDT
BERLIN

I. SCHUR
BERLIN

HERAUSGEGEBEN

VON

L. LICHTENSTEIN
BERLIN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

W. BLASCHKE L. FEJÉR G. HERGLOTZ A. KNESER E. LANDAU
O. PERRON F. SCHUR E. STUDY H. WEYL

3. BAND



BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1919

5856-42

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG

VON

K. KNOPP
BERLIN

E. SCHMIDT
BERLIN

I. SCHUR
BERLIN

HERAUSGEGEBEN

VON

L. LICHTENSTEIN
BERLIN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

W. BLASCHKE L. FEJÉR G. HERGLOTZ A. KNESER E. LANDAU
O. PERRON F. SCHUR E. STUDY H. WEYL

3. BAND



BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1919

Inhaltsverzeichnis

Seite

Bieberbach, L., Über eine Vertiefung des Picardschen Satzes bei ganzen Funktionen endlicher Ordnung	175
Blumenthal, O., Über eine neue Randwertaufgabe bei elastischen Membranen	213
Carleman, T., Über eine isoperimetrische Aufgabe und ihre physikalischen Anwendungen	1
Courant, R., Über konforme Abbildung von Bereichen, welche nicht durch alle Rückkehrschnitte zerstückelt werden, auf schlichte Normalbereiche	114
Frank, Ph. u. Löwner, K., Eine Anwendung des Koebeschen Verzerrungssatzes auf ein Problem der Hydrodynamik	78
Funk, P., Über den Begriff „extremale Krümmung“ und eine kennzeichnende Eigenschaft der Ellipse	87
Groß, W., Zum Verhalten der konformen Abbildung am Rande	43
Hausdorff, F., Der Wertvorrat einer Bilinearform	314
Horn, J., Singuläre Systeme linearer Volterrascher Integralgleichungen	265
Hurwitz, A., Der Euklidische Divisionssatz in einem endlichen algebraischen Zahlkörper	123
Jolles, St., Die für die Korrelation eines polaren Raumes invarianten linearen Komplexe und die aus ihnen gebildeten zwei I' -Bündel	209
Lichtenstein, L., Über eine isoperimetrische Aufgabe der mathematischen Physik	8
Lichtenstein, L., Zur Analysis der unendlich vielen Variablen. Zweite Abhandlung	127
Lichtenstein, L., Bemerkung zu der Abhandlung: „Untersuchungen über die Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten, deren Teilchen einander nach dem Newtonschen Gesetze anziehen“	172
Löwner, K., Über Extremumsätze bei der konformen Abbildung des Äußeren des Einheitskreises	65
Perron, O., Über einen Satz des Herrn Helge von Koch über die Integrale linearer Differentialgleichungen	161
Rademacher, H., Nachträgliche Bemerkung	317
Schmeidler, W., Über Moduln und Gruppen hyperkomplexer Größen	29
Schwan, W., Streckenrechnung und Gruppentheorie	11
Sternberg, W., Die Entwicklung unstetiger Funktionen nach den Eigenfunktionen eines eindimensionalen Randwertproblems	191
Theis, M., Über eine Interpolationsformel von de la Vallée Poussin	93

Über eine isoperimetrische Aufgabe und ihre physikalischen Anwendungen.

Von

T. Carleman in Upsala.

Im ersten Bande dieser Zeitschrift hat Herr Blaschke mittels der Steinerschen Symmetrisierung den folgenden Satz bewiesen. Unter allen Eibereichen (B) gegebenen Flächeninhalts F liefern die Kreisscheiben den größten Wert für das Doppelintegral

$$\int_B \int_B f(r_{pq}) dF_p dF_q,$$

unter $f(r)$ eine positive, den Bedingungen

$$f'(r) < 0, \quad f''(r) < 0$$

genügende Funktion verstanden. Dabei bedeutet r_{pq} den Abstand zwischen zwei Punkten p und q von B .

Ähnliche Doppelintegrale treten oft bei Stabilitätsproblemen auf. So begegnet man beispielsweise in der Theorie des Gleichgewichtes einer der eigenen Schwere unterworfenen Flüssigkeitsmasse der Aufgabe das Maximum des Doppelintegrals

$$\int_B \int_B \frac{1}{r_{pq}} dV_p dV_q$$

zu bestimmen, wenn das Volumen V des räumlichen Bereiches B vorgegeben ist. Herr Blaschke erwähnt dieses Beispiel und bemerkt, daß sein Satz hier nicht anwendbar sei, weil

$$\frac{d^2 \left(\frac{1}{r} \right)}{dr^2} > 0$$

ist.

Es dürfte darum nicht ohne Interesse sein, daß der besprochene Satz sich folgendermaßen verallgemeinern läßt.

Satz I. Wenn die Funktion $f(r)$ positiv und abnehmend ist, so erreicht das Integral

$$J = \int_B \int_B f(r_{pq}) dF_p dF_q$$

seinen größten Wert für eine Kreisscheibe¹⁾.

Der Beweis benutzt ebenfalls die Steinersche Symmetrisierung. Das Gebiet B wird zunächst als konvex vorausgesetzt. Nehmen wir diejenige Gerade, an welcher die Symmetrisierung zu vollziehen ist, als die x -Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems an, so können wir den Symmetrisierungsvorgang folgendermaßen erklären. Es sei B durch die Ungleichheit

$$f_1(x) \leq y \leq f_2(x) \quad (a \leq x \leq b)$$

gegeben. Dann ist der symmetrisierte Bereich B^* das Innere der geschlossenen Kurve

$$y = \pm \frac{1}{2} [f_2(x) - f_1(x)] = \pm h(x).$$

Offenbar haben B und B^* denselben Inhalt. Durch geeignete Integrationsvertauschung findet man

$$(1) \quad J = \int_B \int_B f(r_{pq}) dF_p dF_q = \int_a^b \int_a^b H(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2,$$

wo

$$H(\xi_1, \xi_2) = \int_{f_1(\xi_1)}^{f_2(\xi_1)} \int_{f_1(\xi_2)}^{f_2(\xi_2)} f(\sqrt{(\xi_1 - \xi_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2}) d\eta_1 d\eta_2.$$

gesetzt ist. Für das entsprechende über B^* erstreckte Integral ergibt sich

$$(2) \quad \begin{cases} J^* = \int_a^b \int_a^b H^*(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2, \\ H^*(\xi_1, \xi_2) = \int_{-h(\xi_1)}^{h(\xi_1)} \int_{-h(\xi_2)}^{h(\xi_2)} f(\sqrt{(\xi_1 - \xi_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2}) d\eta_1 d\eta_2. \end{cases}$$

Wir brauchen nun das folgende Lemma (A). Seien G und G' zwei zur y -Achse parallele Strecken von gegebener Länge. Einen Punkt auf G oder G' bezeichnen wir mit p bzw. q , die zugehörigen Linienelemente mit ds_p bzw. ds_q . Ferner mögen p_1, p_2 und q_1, q_2 die Endpunkte von G bzw. G' bedeuten. Das Integral

$$J(z) = \int_G \int_{G'} f(r_{pq}) ds_p ds_q,$$

welches bei konstant gehaltenem Abstand der G und G' enthaltenden Geraden offenbar nur vom Höhenunterschied z der Schwerpunkte $\bar{p}$ und $\bar{q}$ von G und G' abhängig ist, erreicht seinen Höchstwert für $z = 0$.

¹⁾ Die Funktion $f(r)$ kann für $r = 0$ unendlich werden, doch muß die Konvergenz von $\int_0^a r f(r) dr$ vorausgesetzt werden.

Bei dem Beweis wird die Gleichung

$$\frac{dJ(z)}{dz} = \int_{G'} f(r_{p_2 q}) ds_q - \int_{G'} f(r_{p_1 q}) ds_q$$

benutzt, ferner wird angenommen, daß $\bar{p}$ höher als $\bar{q}$ liegt, was offenbar keine Beschränkung der Allgemeinheit mit sich bringt. Wir unterscheiden nun zwei Fälle.

1. Die Horizontale durch $\bar{p}$ trifft G' nicht. Dann ist auf G'

$$(3) \quad r_{p_2 q} > r_{p_1 q},$$

folglich

$$\frac{dJ(z)}{dz} < 0.$$

2. Die Horizontale durch $\bar{p}$ trifft G' in q' . Bezeichnen wir mit q_3 den zu q_2 in bezug auf q' symmetrischen Punkt auf G' , so bekommen wir wegen

$$\int_{q_3}^{q_2} f(r_{p_2 q}) ds_q = \int_{q_1}^{q_3} f(r_{p_1 q}) ds_q$$

die Gleichung

$$\frac{dJ(z)}{dz} = \int_{q_1}^{q_3} f(r_{p_2 q}) ds_q - \int_{q_1}^{q_3} f(r_{p_1 q}) ds_q.$$

Da auf der Strecke $q_1 q_3$ wieder die Ungleichheit (3) gilt, so ergibt sich auch in diesem Falle

$$\frac{dJ(z)}{dz} < 0,$$

womit unser Lemma bewiesen ist.

Aus dem soeben bewiesenen Satze folgt nun, daß

$$H(\xi_1, \xi_2) \leq H^*(\xi_1, \xi_2)$$

ist, was mit (1) und (2) zusammen die Ungleichheit

$$(4) \quad J \leq J^*$$

ergibt. Das Gleichheitszeichen kann nur dann gelten, wenn B bereits symmetrisiert ist. Da aber unser Bereich durch sukzessive Symmetrisierungen an zwei Geraden, die miteinander einen im Verhältnis zu π irrationalen Winkel bilden, schließlich gegen einen mit B flächengleichen Kreis konvergiert, so ist hiermit unser Satz für konvexe Bereiche bewiesen.

Bei Heranziehung einer von Herrn W. Groß²⁾ zum Beweise der isoperimetrischen Haupteigenschaft der Kugel angewandten Methode kann man den Satz I auch für nicht konvexe Bereiche beweisen. In diesem Falle wird die Symmetrisierung folgendermaßen erklärt. Wir tragen auf

²⁾ Monatshefte für Mathematik und Physik 28 (1917), S. 77–97.

jeder zur x -Achse senkrechten Geraden von ihrem Durchstoßpunkt mit der x -Achse nach beiden Seiten hin die Strecke $\frac{d}{2}$ ab, wenn d die gesamte Länge ist, die die betreffende Gerade mit B gemein hat. Die Gesamtheit dieser Strecken definieren den symmetrisierten Bereich B^* . Da nach Herrn Groß eine Folge sukzessiver Symmetrisierungen gefunden werden kann derart, daß die Transformaten des Bereiches B gegen eine Kreisfläche konvergieren, so genügt es zu zeigen, daß auch im vorliegenden Falle die Ungleichheit

$$J \leq J^*$$

gilt. Diese ergibt sich aus folgender Verallgemeinerung des Lemmas (A).

Auf zwei Vertikalen seien Systeme von Strecken G bzw. G' , deren Teile einander nicht überdecken, gegeben. Diese Strecken benennen wir von oben nach unten mit $g_1, g_2, \dots, g_m$ bzw. $g'_1, g'_2, \dots, g'_n$, die zugehörigen Schwerpunkte mit $y_1, y_2, \dots, y_m$ bzw. $y'_1, y'_2, \dots, y'_n$. Dann erreicht das Integral

$$\int_G \int_{G'} f(r_{pq}) ds_p ds_q$$

unter der Nebenbedingung, daß die gesamten Längen von G bzw. G' konstant bleiben, sein Maximum, wenn sowohl G als auch G' zusammenhängend sind und ihre Schwerpunkte dieselbe Höhe haben.

Dieses Lemma wird auf den Satz (A) zurückgeführt, indem wir zeigen, daß, wenn G und G' nicht bereits zusammenhängend sind, es immer möglich ist, durch eine vertikale Verschiebung von g_i und g'_i ein Streckensystem $\bar{G}\bar{G}'$ zu erhalten, so daß die Anzahl der einzelnen Strecken kleiner wird und

$$(5) \quad \int_G \int_{G'} f(r_{pq}) ds_p ds_q < \int_{\bar{G}} \int_{\bar{G}'} f(r_{pq}) ds_p ds_q$$

gilt. Man kann etwa folgendermaßen verfahren. Es habe z. B. g_1 die größte Schwerpunktsordinate. Wenn bei der Bewegung von g_1 bis zum Zusammenstoß mit g_2 der Wert y_1 immer größer als y'_1 bleibt, so wird durch diese Verschiebung das erwünschte Resultat erreicht. Im entgegengesetzten Falle bringen wir zunächst den Schwerpunkt von g_1 auf die Höhe von y'_1 und bewegen dann g_1 und g'_1 als starres System nach unten, bis eine von diesen beiden Strecken mit einer anderen zusammenstößt. Da bei diesen Verschiebungen mindestens eine der Größen $|y_i - y'_k|$ verkleinert und keine vergrößert wird, so ist die Beziehung (5) erfüllt.

Die Frage, ob es außer dem gefundenen absoluten Extremum noch relative Extrema gibt, wird durch den folgenden Satz im negativen Sinne beantwortet.

Satz II. Wenn $f(r)$ den im Satz I erwähnten Bedingungen genügt und wenn

$$\Phi(p) = \int_B f(r_{pq}) dF_q$$

auf dem Rande von B einen konstanten Wert annimmt³⁾, dann ist B ein Kreis.

Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf solche Bereiche B , deren Begrenzung aus einer endlichen Anzahl stetig gekrümmter Kurvenstücke besteht. Wir betrachten die Mittelpunkte der verschiedenen Sehnen, die aus B durch eine beliebige Parallele zur y -Achse herausgeschnitten werden. Diese bilden ein Kurvensystem, das wir C nennen wollen. Es möge (x_0, y_0) ein Punkt auf C sein, dessen Ordinate Maximum ist. Wenn (x_0, y_0) im Innern von B liegt, so gibt es eine positive Zahl d derart, daß die Punkte l_1 und l_2 mit den Koordinaten $(x_0, y_0 - d)$ bzw. $(x_0, y_0 + d)$ Randpunkte sind. Wegen $\Phi(l_1) = \Phi(l_2)$ gilt

$$\int_B f(r_{l_1q}) dF_q - \int_B f(r_{l_2q}) dF_q = 0$$

oder

$$(6) \quad \int_a^b \int_{G(\xi)} (f(r_{l_1q}) - f(r_{l_2q})) ds_q d\xi = 0,$$

wo $G(\xi)$ die Gesamtheit der durch die Gerade $x = \xi$ aus B ausgeschnittenen Sehnen bezeichnet. Gemäß den Ausführungen beim Beweise des Lemmas (A) ist aber die linke Seite von (6) sicher positiv, es sei denn, daß C sich auf die Horizontale durch (x_0, y_0) reduziert. Liegt hingegen der Punkt (x_0, y_0) , den wir zur Abkürzung l nennen, auf der Berandung L von B , so können wir folgendermaßen schließen. Da die tangentielle Ableitung in l gleich Null ist, so ist

$$\int_L f(r_{lq}) dx_q = 0^4).$$

Die linke Seite ist aber negativ, wenn die Horizontale durch (x_0, y_0) keine Symmetrieachse ist. Wir können das Bewiesene folgendermaßen zusammenfassen. Jede Gerade durch den Schwerpunkt von B ist eine Symmetrieachse. Dann aber ist B notwendigerweise eine Kreisscheibe. Die Sätze I und II lassen sich auf genau dieselbe Weise für drei- und mehrdimensionale Integrale beweisen.

³⁾ Dies besagt, daß die erste Variation von J bei konstant gehaltenem Flächeninhalt von B verschwindet.

⁴⁾ Hier ist angenommen, daß l ein regulärer Randpunkt ist. Man sieht aber ohne Schwierigkeit, daß auch in dem Falle, wo l ein Eckpunkt ist, diese Gleichung gelten muß, wenigstens wenn $\int_0^a f(r) dr$ konvergiert.

Zum Schluß mögen folgende Anwendungen erwähnt werden.

Damit eine nur der eigenen Schwere unterworfenen Flüssigkeitsmasse Ω sich im Gleichgewicht befinde, ist notwendig und hinreichend, daß

$$\Phi(p) = \int_{\Omega} \frac{1}{r_{pq}} d\Omega_q$$

auf der begrenzenden Fläche gleich einer Konstanten sei. Aus dem dreidimensionalen Analogon des Satzes II folgt also: *Die einzige Gleichgewichtsfigur einer ruhenden, gravitierenden Flüssigkeitsmasse ist eine Kugel⁵⁾.*

Betrachten wir jetzt das folgende Problem aus der Theorie der zweidimensionalen Bewegungen einer idealen unbegrenzten Flüssigkeit. Es sind alle im Unendlichen verschwindenden stationären Bewegungen mit stetigen Geschwindigkeitskomponenten zu bestimmen, die außerhalb eines einfach zusammenhängenden Bereiches B wirbelfrei sind und im Innern von B eine konstante Rotation ω besitzen.

Aus der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

wo u und v wie üblich die Geschwindigkeitskomponenten bedeuten, folgt, daß es eine in der ganzen Ebene eindeutige Funktion ψ gibt, so daß

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

gilt. Für die Rotation

$$\xi = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

erhält man die Beziehung

$$2\xi + \Delta\psi = 0.$$

Die Funktion ψ muß folgenden Bedingungen genügen.

1. Die Funktionen

$$\psi, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

sollen in der ganzen Ebene stetig sein.

2. Es gilt

$$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 \right] = 0.$$

3. Es ist

$$\Delta\psi = 0 \text{ außerhalb } B, \quad \Delta\psi = -2\omega \text{ innerhalb } B.$$

⁵⁾ Diesen Satz hat auf einem ganz anderen Wege zuerst A. Liapounoff bewiesen. Vgl. z. B. H. Poincaré, *Figures d'équilibre d'une masse fluide*, Paris 1902, S. 13–24.

Es ist leicht zu sehen, daß ψ bis auf eine willkürliche additive Konstante eindeutig bestimmt ist. Man verifiziert nun, daß ψ von der Form

$$\psi(p) = \frac{\omega}{\pi} \int_B \log \frac{1}{r_{pq}} dF_q + \text{Const.}$$

sein muß. Aus bekannten Helmholtzschen Wirbelsätzen folgt, daß die Wirbelstärke in einem mit der Flüssigkeit bewegten Punkt zeitlich konstant bleibt. Bei stationärer Bewegung muß also die Begrenzung von B eine Stromlinie sein. Da längs einer Stromlinie die Stromfunktion konstant ist, muß

$$\int_B \log \frac{1}{r_{pq}} dF_q$$

auf der Berandung von B einer Konstanten gleich sein. Dies ist die notwendige und, wie man sofort sieht, auch hinreichende Bedingung für eine stationäre Bewegung. Aus Satz II erhält man also: *Alle stationäre Wirbel mit konstanter Rotationsdichte und einfach zusammenhängendem Querschnitt sind kreisförmig⁶⁾.*

⁶⁾ Wir nennen hier eine Bewegung stationär, wenn die Geschwindigkeit in jedem Punkt des Raumes zeitlich konstant bleibt. Die Kirchhoffschen elliptischen Wirbel werden also nicht als stationär betrachtet.

(Eingegangen am 11. April 1918.)

Über eine isoperimetrische Aufgabe der mathematischen Physik.

Von

Leon Lichtenstein in Berlin.

In der dieser Note vorangehenden Arbeit hat Herr Carleman in Weiterführung gewisser Resultate des Herrn Blaschke¹⁾ unter anderem den folgenden, zuerst auf einem anderen Wege von Herrn Liapounoff²⁾ erledigten Satz bewiesen.

Unter allen von einer endlichen Anzahl Stücke analytischer und regulärer Flächen begrenzten einfach zusammenhängenden Körpern B gleichen Volumens ist der Kugelkörper dadurch ausgezeichnet, daß für diesen das Integral

$$(1) \quad \iint_B \frac{1}{r_{pq}} dV_p dV_q$$

den größten Wert annimmt.

Unter p und q sind hier beliebige Punkte in B , unter r_{pq} ihre Entfernung, unter dV_p , dV_q Volumelemente in p und q zu verstehen³⁾.

Denkt man sich die betrachteten Körper gleichen Volumens mit homogener, der Newtonschen Anziehung unterworfenen, ruhender Masse erfüllt, so besagt der vorstehende Satz, daß dem Kugelkörper das absolute

¹⁾ Vgl. W. Blaschke, „Eine isoperimetrische Eigenschaft des Kreises“, Math. Zeitschrift 1 (1918), S. 52—57.

²⁾ Vgl. H. Poincaré, Figures d'équilibre d'une masse fluide, Paris 1902, S. 13—24.

³⁾ Der Einfachheit halber wird hier die Begrenzung der Vergleichskörper als „abteilungsweise analytisch“ angenommen. Der Satz selbst gilt unter wesentlich allgemeineren Voraussetzungen. Man vergleiche die Arbeit des Herrn Carleman und die die klassische isoperimetrische Eigenschaft der Kugel betreffende Abhandlung von Wilhelm Groß, „Die Minimaleigenschaft der Kugel“, Monatshefte f. Math. u. Physik 28 (1918), S. 77—97.

Minimum der Energie entspricht⁴⁾. Wie Herr Carleman weiter zeigt, verschwindet die erste Variation des betrachteten isoperimetrischen Variationsproblems nur für eine Kugel, so daß die Kugel die einzige Gleichgewichtsfigur einer homogenen, sich selbst überlassenen, gravitierenden Flüssigkeit ist.

In den folgenden Zeilen wird im Anschluß an das zuerst genannte Resultat gezeigt, daß eine analoge Minimumeigenschaft für *nicht*homogene Flüssigkeiten gilt.

Es sei ein aus einer endlichen Anzahl ($p_0 \geq 1$) nicht notwendig einfach zusammenhängender Massen, die allemal von endlich vielen Stücken analytischer Flächen begrenzt sind, bestehender Körper B_0 gegeben. Die einzelnen Massen können auf den Randflächen gelegene Punkte oder Linienstücke gemeinsam haben. Der Körper B_0 sei mit Masse erfüllt, deren Verteilung durch die folgenden Festsetzungen charakterisiert ist. Der Einfachheit halber nehmen wir an, daß die Dichte ϱ sich zwischen einem kleinsten Wert ϱ' und einem Maximalwert ϱ'' stetig bewegt. Es sei ϱ ein in dem Intervall $(\varrho' \varrho'')$ gelegener Wert der Dichte und B_ϱ die Gesamtheit der Punkte in B_0 , deren Dichte $\geq \varrho$ ist. Wir nehmen an, daß B_ϱ aus einer endlichen Anzahl ($p_\varrho \geq 1$) von Massen besteht. Jede dieser Massen ist, wie B_0 , von endlich vielen Stücken analytischer und regulärer Flächen⁵⁾ begrenzt. Die einzelnen Massen können auf den Randflächen gelegene Punkte oder Linienstücke gemeinsam haben. Für $\varrho = \varrho''$ soll sich B_ϱ auf eine endliche Anzahl analytischer Flächen, Linienstücke oder Punkte reduzieren.

Wir nehmen der Einfachheit halber an, daß p_ϱ für alle ϱ unterhalb einer endlichen Schranke liegt.

Es sei $V(\varrho)$ das Volumen von B_ϱ . Es gilt $V(\varrho_1) > V(\varrho_2)$, allemal wenn $\varrho_1 < \varrho_2$ ist; es ist ferner $V(\varrho'') = 0$. Die Funktion $V(\varrho)$ ist monoton abnehmend; sie kann darum in $(\varrho' \varrho'')$ nur sprunghafte Unstetigkeiten haben. Der Einfachheit halber nehmen wir an, daß $V(\varrho)$ sich mit ϱ stetig ändert. Der geometrische Ort der Punkte gleicher Dichte besteht demnach aus einer endlichen Anzahl von Flächenstücken, die sich allenfalls auf Linienstücke oder Punkte reduzieren können.

Wir beweisen den folgenden Satz.

Unter allen vorhin näher bezeichneten Verteilungen der Massen B_0 , die überdies so beschaffen sind, daß die Volumina $V(\varrho)$ vorgegebene Werte

⁴⁾ Sei ϱ die Dichte der Flüssigkeit. Die Gravitationsenergie ist, wenn die Einheiten in geeigneter Weise gewählt sind, durch den Ausdruck

$$-\varrho \iint_{B \ B} \frac{1}{r_{pq}} dV_p dV_q$$

gegeben.

⁵⁾ Konische Punkte sollen zugelassen werden.

haben, ist die besondere Verteilung, bei der die Körper B_e sämtlich konzentrische Kugeln sind, dadurch ausgezeichnet, daß ihr das Minimum der Energie entspricht.

Flächen gleicher Dichte sind also konzentrische Kugeln. Die Dichte wächst von der Oberfläche nach dem Mittelpunkte zu stetig an.

Der Beweis ist in wenigen Zeilen geliefert. Es sei J die Energie der Flüssigkeit. Es gilt

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} -J &= \iint_{B_0 B_0} \frac{\varrho_p \varrho_q}{r_{pq}} dV_p dV_q = \varrho'^2 \iint_{B_0 B_0} \frac{1}{r_{pq}} dV_p dV_q + 2\varrho' \int_{\varrho'}^{\varrho''} d\bar{\varrho} \iint_{B_0 B_{\bar{\varrho}}} \frac{1}{r_{pq}} dV_p dV_q + \\ &+ \int_{\varrho'}^{\varrho''} \int_{\varrho'}^{\varrho''} d\bar{\varrho} d\underline{\varrho} \iint_{B_{\bar{\varrho}} B_{\underline{\varrho}}} \frac{1}{r_{pq}} dV_p dV_q = \varrho'^2 J_0 + 2\varrho' \int_{\varrho'}^{\varrho''} J(\bar{\varrho}) d\bar{\varrho} + \int_{\varrho'}^{\varrho''} \int_{\varrho'}^{\varrho''} J(\bar{\varrho}, \underline{\varrho}) d\bar{\varrho} d\underline{\varrho}. \end{aligned} \right.$$

In der Tat ist, wenn man

$$(3) \quad \varrho_p = \varrho' + \int_{\varrho'}^{\varrho_p} d\bar{\varrho}, \quad \varrho_q = \varrho' + \int_{\varrho'}^{\varrho_q} d\underline{\varrho}$$

setzt,

$$(4) \quad -J = \varrho'^2 \iint_{B_0 B_0} \frac{1}{r_{pq}} dV_p dV_q + 2\varrho' \iint_{B_0 B_0} \left(\int_{\varrho'}^{\varrho_p} d\bar{\varrho} \right) \frac{1}{r_{pq}} dV_p dV_q + \iint_{B_0 B_0} \left(\int_{\varrho'}^{\varrho_p} d\bar{\varrho} \int_{\varrho'}^{\varrho_q} d\underline{\varrho} \right) \frac{1}{r_{pq}} dV_p dV_q$$

Kehrt man die Reihenfolge der Integrationen um, so erhält man nach einer leichten Umformung in der Tat die Formel (2).

Durch eine fast wortgetreue Wiederholung der Betrachtungen von Herrn Carleman läßt sich zeigen, daß das Doppelintegral $J(\bar{\varrho}, \underline{\varrho})$ bei vorgegebenen Werten von $V(\bar{\varrho})$ und $V(\underline{\varrho})$ den größten Wert annimmt, wenn $B(\bar{\varrho})$ und $B(\underline{\varrho})$ konzentrische Kugeln sind. Das gleiche gilt für das Doppelintegral $J(\bar{\varrho})$, das auch in der Form $J(\varrho', \underline{\varrho})$ geschrieben werden kann. Daraus und aus der bekannten Eigenschaft von J_0 folgt jetzt unsere Behauptung.

Berlin, den 28. Mai 1918.

(Eingegangen am 28. Mai 1918.)

Streckenrechnung und Gruppentheorie.

Von

W. Schwan in Kreuznach.

Einleitung.

Hilbert entwickelte in den „Grundlagen der Geometrie“ eine im wesentlichen auf dem Desarguesschen Satze beruhende Streckenrechnung¹⁾. Hessenberg gab eine Neubegründung dieser Rechnung, indem er das vollständige Viereck der projektiven Geometrie in den Mittelpunkt der Betrachtung schob²⁾. Hölder vereinfachte sie, indem er zuerst die Vektoraddition begründete und dann die Zahl als Verhältnis paralleler Vektoren in die Geometrie einführte³⁾. Hölder baute außerdem die Streckenrechnung durch Heranziehen des Pascalschen Satzes zur projektiven Wurfrechnung aus, die bisher (in dieser Allgemeinheit) nur mit Hilfe des Fundamentalsatzes abgeleitet war⁴⁾. Es handelt sich in diesen Arbeiten darum, ohne Benutzung von Kongruenz- und Stetigkeitsaxiomen⁵⁾ ein System additiv und multiplikativ verknüpfbarer geometrischer Elemente (Strecken, Punkte oder dgl.), kurz ein „geometrisches Zahlensystem“ herzustellen. Nun ist ein Zahlensystem im wesentlichen nichts anderes als eine Gruppe mit doppelter Verknüpfungsmöglichkeit ihrer Elemente⁶⁾.

¹⁾ D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie, 4. Auflage, S. 71 ff.

²⁾ G. Hessenberg, Über einen geometrischen Kalkül, Acta mathematica, Bd. 29 (1905), S. 1–24.

³⁾ O. Hölder, Streckenrechnung und projektive Geometrie, Leipz. Ber. 1911, Heft II, S. 65–183.

⁴⁾ Zu den Wurfrechnungen von F. Schur und Th. Vahlen vgl. O. Hölder, loc. cit. ³⁾, S. 70–72, S. 136 Anm.

⁵⁾ Bei der Weiterbildung der „Streckenrechnung“ zur Wurfrechnung sind Stetigkeitsaxiome oder der Pascalsche Satz notwendig.

⁶⁾ Zahlensystem heiße eine Gesamtheit $\mathfrak{G}$ von Elementen, wenn $\mathfrak{G}$ bei multiplikativer Verknüpfung der Elemente eine „Gruppe allgemeinsten Art“ (vgl. die Anmerkung zu § 1), bei additiver eine echte Gruppe ist, und wenn die beiden distributiven Gesetze gelten.

Man kann deshalb auf den Gedanken kommen, das Problem der Herleitung eines geometrischen Zahlensystems in zwei Teilprobleme zu zerlegen, nämlich

1. das geometrische Problem, aus den geometrischen Axiomen einer Gruppe herzuleiten,
2. das gruppentheoretische Problem, aus einer Gruppe eine „Doppelgruppe“, ein Zahlensystem herzuleiten.

In der Tat zeigte es sich, daß die Lösung des zweiten Problems ohne irgendwelche geometrischen Anleihen innerhalb des Rahmens der abstrakten Gruppentheorie möglich ist. Dabei ergaben sich die Sätze I in § 2, II bzw. IIa in § 4, III in § 5, nach denen mit jeder Abelschen Gruppe ohne weiteres ein Zahlensystem verknüpft ist, insbesondere mit sog. speziellen Abelschen Gruppen ein „Zahlensystem mit Division“. Alles Folgende ist nur ein Beispiel zu den gruppentheoretischen Theoremen des 1. Teils, die sich natürlich auf noch manche andere Art verwenden lassen⁷⁾.

Der zweite Teil bringt die Lösung des geometrischen Problems. Mit Hilfe des Desarguesschen Satzes wird die zu einer Fluchtgeraden ω („Horizont“) gehörige Gesamtheit perspektiver Schiebungen als (spezielle) Abelsche Gruppe G nachgewiesen. Damit sind die Sätze des ersten Teils anwendbar (Satz IV in § 10, V in § 11).

Der dritte Teil bringt eine von der Hölderschen verschiedene Fortbildung der ursprünglich an einen festen Horizont ω gebundenen und insofern affinen „Streckenrechnung“ zur projektiven Wurfrechnung.

I. Gruppentheoretischer Teil.

§ 1.

Multiplikation der Transformationen einer Gruppe in sich.

Es sei eine Gruppe G gegeben. Vom Brauche abweichend benutzen wir als Verknüpfungszeichen $+$. Dem entsprechend bezeichnen wir das sogenannte Einheitsselement der Gruppe mit 0.

Wir betrachten die eindeutigen Transformationen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$ der

⁷⁾ Man wird beispielsweise beim Durchlesen der Arbeit erkennen, daß eine analoge geometrische Theorie der gemeinen komplexen Zahlen und der Quaternionen möglich ist. Man hat dazu etwa von Kongruenz- oder Bewegungsaxiomen auszugehen und die hier benutzte Gruppe der Streckungen durch die der Drehstreckungen in der Ebene bzw. im Raume zu ersetzen.

Gruppe G in sich. Transformiert φ die Elemente x der Gruppe G in die Elemente y , so schreiben wir

$$(1) \quad y = \varphi \cdot x.$$

Die Gleichung $\varphi_1 = \varphi_2$ bedeute, daß für jedes Element x aus G

$$(2) \quad \varphi_1 \cdot x = \varphi_2 \cdot x$$

ist. Das durch die Identität in y

$$(3) \quad (\varphi_2 \cdot \varphi_1) \cdot y = \varphi_2 \cdot (\varphi_1 \cdot y)$$

definierte Produkt $\varphi_2 \cdot \varphi_1$ zweier eindeutiger Transformationen von G in sich ist selbst eine eindeutige Transformation von G in sich. Außerdem ist diese Multiplikation assoziativ, wie aus (1), (2) und (3) sofort folgt. Wir fassen diese beiden Tatsachen in den Satz zusammen: Die eindeutigen Transformationen einer Gruppe in sich bilden bei multiplikativer Verknüpfung eine „Gruppe allgemeinsten Art“⁸⁾.

§ 2.

Addition der Transformationen einer Gruppe in sich.

Wir definieren jetzt die Summe zweier eindeutiger Transformationen von G in sich durch die Identität in y

$$(4) \quad (\varphi_2 + \varphi_1)y = \varphi_2 y + \varphi_1 y.$$

Aus (4) und (1) folgt mit Rücksicht auf (2) das „erste“ distributive Gesetz

$$(5) \quad (\varphi_2 + \varphi_1) \cdot \varphi = \varphi_2 \cdot \varphi + \varphi_1 \cdot \varphi,$$

wodurch die Bezeichnung „Summe“ gerechtfertigt erscheint.

Aus den drei fundamentalen Gruppeneigenschaften von G ergeben sich sofort die entsprechenden für das System der eindeutigen Transformationen von G in sich: Erstens ist $\varphi_2 + \varphi_1$ selbst eine eindeutige Transformation von G in sich. Zweitens lassen sich die Gleichungen $\varphi_1 + \xi = \varphi_2$ und $\eta + \varphi_1 = \varphi_2$ je durch eine und nur eine eindeutige Transformation ξ bzw. η von G in sich befriedigen. Schließlich ist diese Addition assoziativ. Im ganzen gilt also:

Satz I. *Die eindeutigen Transformationen einer Gruppe G in sich, die bei multiplikativer Verknüpfung nur eine Gruppe allgemeinsten Art*

⁸⁾ Eine Menge verknüpfbarer Elemente soll also eine Gruppe allgemeinsten Art heißen, wenn erstens die Verknüpfung zweier Elemente stets ein Element der Menge ergibt und wenn zweitens das assoziative Gesetz gilt.

Γ' bilden, bilden bei additiver Verknüpfung eine echte Gruppe Γ . Multiplikation und Addition sind durch das erste distributive Gesetz verbunden.

Aus dem Gruppencharakter von Γ folgt insbesondere die Existenz einer eindeutigen Transformation O von G in sich, die für beliebige φ

$$(6) \quad \varphi + O = O + \varphi = \varphi$$

genügt. Es ist die durch die Identität in $\mathcal{Y}$

$$(7) \quad Oy = 0$$

definierte Transformation. Aus (7) und (1) folgt mit Rücksicht auf (2) für beliebige φ

$$(8) \quad O\varphi = O.$$

§ 3.

Das zweite distributive Gesetz.

Soll für drei bestimmte eindeutige Transformationen $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$ von G in sich das zweite distributive Gesetz

$$(9) \quad \varphi(\varphi_2 + \varphi_1) = \varphi\varphi_2 + \varphi\varphi_1$$

gelten, so muß für alle Elemente y_1, y_2 , die sich aus einem beliebigen Element x der Gruppe G gemäß

$$(10) \quad \begin{aligned} y_1 &= \varphi_1 \cdot x \\ y_2 &= \varphi_2 \cdot x \end{aligned}$$

ergeben, die Transformation φ der Gleichung

$$(11) \quad \varphi \cdot (y_2 + y_1) = \varphi \cdot y_2 + \varphi \cdot y_1$$

genügen. Gilt umgekehrt (11) für irgend zwei Elemente y_1, y_2 , die sich aus einem beliebigen Element x der Gruppe G gemäß (10) ergeben, so gilt für die Transformation φ aus (11) und irgend zwei eindeutige Transformationen φ_1, φ_2 von G in sich (9). Das zweite distributive Gesetz ist also sicher gültig, wenn (11) für irgend zwei Elemente y_1, y_2 von G gilt, d. h. wenn φ ein „eindeutiger Automorphismus“ von G ist.

§ 4.

Zahlensystem der Automorphismen einer Abelschen Gruppe.

Aus (11) und (3) entnimmt man, daß das Produkt zweier eindeutigen Automorphismen von G ebenfalls ein eindeutiger Automorphismus von G ist. Dagegen ist die Summe $\varphi_2 + \varphi_1$ irgend zweier eindeutiger Automorphismen φ_1, φ_2 von G dann und nur dann stets ein eindeutiger Auto-

morphismus von G , wenn G eine Abelsche Gruppe ist. Zu den eindeutigen Automorphismen von G gehört nämlich auch die durch die Identität in $x \varepsilon \cdot x = x$ definierte Transformation ε . Nun genügt $\varepsilon + \varepsilon$ nach (4) identisch $(\varepsilon + \varepsilon)x = x + x$. Gilt also für beliebige eindeutige Automorphismen φ_1, φ_2 von G

$$(12) \quad (\varphi_2 + \varphi_1) \cdot (y + z) = (\varphi_2 + \varphi_1)y + (\varphi_2 + \varphi_1)z,$$

so folgt, wenn wir φ_1 und φ_2 mit ε identifizieren,

$$y + z + y + z = y + y + z + z$$

und hieraus

$$(13) \quad z + y = y + z.$$

Gilt umgekehrt für beliebige Elemente yz von G (13), so ergibt sich für beliebige eindeutige Automorphismen φ_1, φ_2 folgendermaßen (12). Nach (4) ist einerseits

$$(14) \quad (\varphi_2 + \varphi_1) \cdot (y + z) = \varphi_2(y + z) + \varphi_1(y + z) \\ = \varphi_2 y + \varphi_2 z + \varphi_1 y + \varphi_1 z,$$

andererseits

$$(15) \quad (\varphi_2 + \varphi_1)y + (\varphi_2 + \varphi_1)z = \varphi_2 y + \varphi_1 y + \varphi_2 z + \varphi_1 z.$$

Ist nun G eine Abelsche Gruppe, so sind die rechten Seiten der Gleichungen (14) und (15) gleich, woraus (12) folgt.

Die Addition der eindeutigen Automorphismen einer kommutativen Gruppe ist selbst kommutativ. Es gibt also nur eine Subtraktion. Man beweist analog, daß auch sie auf eindeutige Automorphismen von G führt. Dem Satz I des § 2 können wir also folgenden Satz zur Seite stellen:

Satz II. *Die eindeutigen Automorphismen einer kommutativen Gruppe und nur die einer kommutativen Gruppe G bilden bei additiver Verknüpfung eine echte Gruppe, während sie bei multiplikativer Verknüpfung nur eine Gruppe allgemeinsten Art bilden. Addition und Multiplikation sind durch die beiden distributiven Gesetze verbunden. Die Addition ist kommutativ.*

Kürzer formulieren wir diesen Satz so:

Satz IIa. *Die eindeutigen Automorphismen einer kommutativen und nur einer kommutativen Gruppe bilden ein Zahlensystem⁹⁾.*

⁹⁾ Bei einer nichtabelschen Gruppe G gilt folgendes: Die Automorphismen und die durch deren Addition entstehenden Transformationen von G bilden eine echte additive Gruppe Γ . Das Produkt zweier „Automorphismussummen“ von G erweist sich nach § 3 und dem ersten distributiven Gesetz als Automorphismensumme. Die Automorphismen einer nichtabelschen Gruppe und deren Summen genügen also mut. Satz I in § 2. Ihr System unterscheidet sich von einem Zahlensystem nur da-

§ 5.

Zahlensysteme mit Division. Spezielle Abelsche Gruppen.

Wir sprechen von einer speziellen Abelschen Gruppe G , wenn das Automorphismenzahlensystem von G ein Untersystem Γ enthält, innerhalb dessen die beiden Divisionen eindeutig ausführbar sind, abgesehen natürlich von der Division durch O . Eine spezielle Abelsche Gruppe liegt also vor, wenn das Automorphismensystem von G eine *echte* multiplikative Gruppe Γ' enthält, die nach Ergänzung durch die O eine echte additive Gruppe Γ ergibt. Es gilt nun:

Satz III. *Die Elemente einer intransitiven echten multiplikativen Gruppe Γ' von Automorphismen einer Abelschen Gruppe G bilden zusammen mit dem Automorphismus O dann und nur dann auch bei additiver Verknüpfung eine echte Gruppe Γ , wenn die Systeme der Intransitivität $\Gamma'x$ zusammen mit dem Element o echte Gruppen Γx bilden¹⁰⁾.*

Die Notwendigkeit dieser Bedingung folgt sofort aus der Definition (4) der Addition. Um zu zeigen, daß sie hinreicht, gehen wir von irgend zwei Automorphismen γ_1 und γ_2 aus Γ und einem beliebigen Element $a \neq 0$ von G aus. Es existiert dann unter der Voraussetzung des Satzes III ein Automorphismus γ in Γ , der

$$(16) \quad \gamma_1 a + \gamma_2 a = \gamma a$$

genügt. Läßt sich jetzt zeigen, daß, sobald für ein bestimmtes Element a (16) gilt, für jedes beliebige Element x ebenfalls

$$(17) \quad \gamma_1 x + \gamma_2 x = \gamma x$$

erfüllt ist, so folgt aus (2) und (4)

$$(18) \quad \gamma = \gamma_1 + \gamma_2,$$

d. h. $\gamma_1 + \gamma_2$ gehört Γ an.

durch, daß das zweite distributive Gesetz nicht durchgängig gültig ist. — Da jeder Automorphismus und jede Automorphismensumme von G die Kommutatorgruppe $\mathfrak{K}$ von G in sich transformiert und deren Nebengruppen nur vertauscht, nicht zerstört, so entspricht jeder dieser Transformationen von G in sich ein Automorphismus der Abelschen Gruppe $G/\mathfrak{K}$. Diese Abbildung des Systems Γ auf ein Zahlensystem Γ/K von Automorphismen der $G/\mathfrak{K}$ läßt sich dadurch zu einer eineindeutigen isomorphen Abbildung machen, daß man die Transformationen aus Γ modulo K nimmt, wenn K die Gruppe derjenigen Automorphismen und Automorphismensummen von G ist, die alle Elemente von G in solche von $\mathfrak{K}$ transformieren. M. a. W. Es ist Γ/K isomorph einem Zahlensystem von Automorphismen der Gruppe $G/\mathfrak{K}$.

¹⁰⁾ $\Gamma'x$ (Γx) bezeichnet die Gesamtheit der Elemente y , die sich aus dem Element x von G gemäß $y = \gamma x$ ergeben, wenn hierin γ alle Automorphismen von Γ' (Γ) durchläuft; — $\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma \gamma' \gamma'' \dots$ bedeuten im folgenden Automorphismen aus Γ .

Um diesen Nachweis zu führen, setzen wir

$$(19) \quad a = x + y.$$

Es gibt nun innerhalb Γ Automorphismen γ' und γ'' , die

$$(20) \quad \begin{aligned} \gamma_1 x + \gamma_2 x &= \gamma' x, \\ \gamma_1 y + \gamma_2 y &= \gamma'' y \end{aligned}$$

nügen. Hieraus und aus (16) folgt

$$(21) \quad \gamma a = \gamma' x + \gamma'' y.$$

Da Γ' eine echte Gruppe ist, so sind die Systeme $\Gamma'x$ und $\Gamma'y$ durch irgendeines ihrer Elemente bestimmte „Klassen“ und die Gruppen $\Gamma'x$ und $\Gamma'y$ teilerfremd oder identisch. Setzen wir zunächst voraus, $\Gamma'a$ gehöre $\Gamma'a$ nicht an, so sind außer $\Gamma'a$ und $\Gamma'x$ auch $\Gamma'x$ und $\Gamma'y$ teilerfremd. Hieraus folgt, daß die Zerlegung (21) von γa im Elemente $\Gamma'x$ und $\Gamma'y$ identisch mit der Zerlegung

$$(22) \quad \gamma a = \gamma x + \gamma y$$

ist, deren Gültigkeit sich aus (19) ergibt. Denn aus (21) und (22) folgt

$$0 = (\gamma' x - \gamma x) + (\gamma'' y - \gamma y),$$

also wegen der Teilerfremdheit

$$(23) \quad \begin{aligned} \gamma' x &= \gamma x, \\ \gamma'' y &= \gamma y. \end{aligned}$$

Aus (23) und (20) ergibt sich die gewünschte Gleichung (17) für irgendein $\Gamma'a$ nicht angehörendes Element x .

Gehört aber x $\Gamma'a$ an, so gibt es doch, weil Γ' intransitiv ist, ein $\Gamma'a$ nicht angehörendes Element b . Für dieses gilt

$$\gamma_1 b + \gamma_2 b = \gamma b,$$

und da x $\Gamma'b$ nicht angehört, folgt hieraus wieder (17).

Ebenso beweist man, daß $\gamma_1 - \gamma_2$ Γ angehört. Damit ist Satz III bewiesen.

Der Charakter der speziellen Abelschen Gruppen G ist leicht zu durchschauen. Sind $e_1, e_2, \dots, e_n$ Elemente von G und folgt aus jeder richtigen

Gleichung $\sum_1^n \gamma_i e_i = 0$, daß $\gamma_i = 0$ ($i = 1, 2 \dots n$), so sollen die e_i linear unabhängig heißen. Gibt es nur eine endliche Anzahl n linear unabhängiger

Elemente e_i innerhalb $G^{(11)}$), so ist jedes Element g von G auf eine Art darstellbar in der Form

$$(24) \quad g = \sum_1^n \gamma_i e_i.$$

Denn dann gilt eine Gleichung $\gamma' \cdot g + \sum_1^n \gamma'_i e_i = 0$, in der nicht alle Automorphismen $\gamma', \gamma'_1, \gamma'_2, \dots, \gamma'_n$ verschwinden, in der also auch nicht γ' verschwindet. Da Γ' eine echte Gruppe, so existiert γ'^{-1} . Setzt man also $\gamma'^{-1} \cdot \gamma'_i = -\gamma_i$, so ergibt sich (24). Die Eindeutigkeit der Darstellung von g folgt aus der linearen Unabhängigkeit der e_i .

Man erkennt aus dieser Darstellung der Gruppenelemente mittels einer Basis e_i ($i = 1, 2 \dots n$), daß spezielle Abelsche Gruppen mit isomorphen Zahlensystemen Γ bei gleicher Zahl der Basiselemente selbst isomorph sind. Insofern ist eine spezielle Abelsche Gruppe mit endlich vielen Basiselementen durch ihr Zahlensystem Γ und die Zahl ihrer Basiselemente bestimmt¹²⁾.

Zu den unendlichen speziellen Abelschen Gruppen gehören solche, deren Automorphismensystem ein dem Zahlensystem der rationalen, der reellen, der gemeinen komplexen Zahlen oder der Quaternionen isomorphes Untersystem enthalten. Von endlichen Abelschen Gruppen sind nur die *spezielle* Abelsche Gruppen, deren sämtliche Elemente die gleiche Primzahlordnung p haben¹³⁾.

§ 6.

Abelsche Gruppe als invariante Untergruppe einer nichtabelschen Gruppe

Wenn die Abelsche Gruppe G invariante Untergruppe einer nichtabelschen Gruppe Ω' ist, so interessieren insbesondere die Automorphismen

¹¹⁾ Das ist auch bei unendlichen z. B. kontinuierlichen geometrischen Gruppen möglich.

¹²⁾ Daß zu jedem Zahlensystem mit Division Γ eine (spezielle) Abelsche Gruppe gehört, die ein Γ isomorphes Zahlensystem von Automorphismen besitzt, ist trivial. Die additive Gruppe Γ ist nämlich schon eine solche Gruppe und die Transformation $x' = \gamma \cdot x$ der γ entsprechende Automorphismus von Γ .

¹³⁾ Die eineindeutigen Automorphismen dieser Gruppen behandelt Moore, Concerning Jordan's linear groups, Bull. of the Amer. Math. Soc. 2 II 2 (1895), S. 33–45. Moore bemerkt dabei, daß die fragliche Gruppe G dem als additive Gruppe aufgefaßten Galoisschen Felde $GF[p^n]$ isomorph sei, daß die Transformation $\xi' = \gamma \xi$ ($\gamma \neq 0$) innerhalb des $GF[p^n]$ ein Automorphismus sei und insofern jeder Zahl γ des $GF[p^n]$ ein Automorphismus der Gruppe G entspreche. Hiermit ist bereits ausgesprochen, daß die Automorphismen einer „endlichen speziellen Abelschen Gruppe“ ein (dem $GF[p^n]$ isomorphes) Zahlensystem mit Division enthalten.

welche durch Transformation von G mit einem Elemente aus Ω' entstehen (Ω' -Automorphismen von G). Sie bilden eine echte multiplikative Gruppe Γ' und, wenn wir die Bedingungen des Satzes III in § 5 als erfüllt voraussetzen, mit O zusammen ein Zahlensystem Γ mit Division.

Wir ordnen den Elementen der „Operatorgruppe“ Ω' die durch sie hervorgebrachten Automorphismen von G , d. h. Zahlen aus Γ zu. Beachten wir die Verknüpfung der Elemente der Operatorgruppe als Multiplikation¹⁴⁾, so entspricht dem Produkt zweier Operatoren das Produkt zweier Zahlen. Um die Ausnahmestellung des Automorphismus O , dem ein Operator in Ω' entspricht, zu beseitigen, ergänzen wir Ω' zu einer Gruppe allgemeiner Art“ Ω durch Hinzufügen eines oder mehrerer Operatoren O , die mit irgendeinem Operator ξ aus Ω' und mit $\xi = 0$ die Gleichung $\xi \cdot O = O \cdot \xi = 0$ genügen.

Diese homomorphe Abbildung der Operatoren von Ω auf die Zahlen von Γ wird dadurch zu einer eindeutigen isomorphen, daß wir die Operatoren modulo K_G nehmen, wenn K_G die Gruppe der mit sämtlichen Elementen von G vertauschbaren Operatoren ist. Ω geht dadurch in Ω/K_G über.

Es läßt sich schließlich (auf eine einzige Art) eine Addition der Elemente von Ω/K_G (Klassen von Operatoren) so definieren, daß die Gruppe Ω/K_G auch der *additiven* Gruppe Γ isomorph wird.

Damit haben wir das Zahlensystem Γ der „ Ω -Automorphismen“ der Operandengruppe“ G isomorph auf ein Zahlensystem Ω/K_G abgebildet, dessen Zahlen Klassen von Operatoren sind¹⁵⁾.

II. Geometrischer Teil.

§ 7.

Voraussetzungen.

Wir benutzen zunächst nur folgende Axiome:

1. Zwei Punkte bestimmen eine Gerade.
2. Zwei Geraden bestimmen einen Punkt.
3. Satz von Desargues für die Ebene.

§ 8.

Die zentrale Kollineation.

Die Existenzfrage einen Augenblick beiseite schiebend, definieren wir eine axiale (zentrale) Kollineation eine Kollineation, die in den Punkten

¹⁴⁾ Zu den Elementen von Ω' gehören auch die von G , sofern sie als Operatoren angesehen. Als Operanden werden sie wie früher durch das Zeichen $+$ verknüpft. Vgl. § 10.

¹⁵⁾ In diesem Zahlensystem stellen die Elemente von K_G , also auch die von G , die Einheit dar.

einer Geraden (den Geraden eines Punktes) lauter Deckpunkte (Deckgeraden) hat. Offenbar bilden die zur gleichen Achse (zum gleichen Zentrum) gehörenden axialen (zentralen) Kollineationen eine Gruppe.

Der Desarguessche Satz zeigt, daß eine axiale Kollineation auch zentral, eine zentrale auch axial ist. Er liefert ferner den „Fundamentalsatz für zentrale Kollineationen“: Es gibt zentrale Kollineationen. Eine zentrale Kollineation ist bestimmt, wenn außer der Achse ω und dem Zentrum C noch zu einem Punkte P der entsprechende P' auf der Geraden CP gegeben ist. P und P' dürfen weder auf C noch auf ω liegen¹⁶).

§ 9.

Die Operatorgruppe Ω' der Streckungen.

Wir legen ein für allemal eine Gerade ω (Horizont) fest. Die Punkte von ω sollen uneigentlich heißen, alle anderen eigentliche. Wir betrachten die Gruppe Ω' der zu ω als Achse gehörenden zentralen Kollineationen. Diese sollen kurz (perspektive) Streckungen heißen, und zwar eigentlich oder uneigentliche, je nachdem ihr Zentrum eigentlich oder uneigentlich ist. Die identische Transformation rechnen wir zu beiden Klassen¹⁷).

Produkt und Quotienten zweier uneigentlicher Streckungen sind selbst uneigentliche Streckungen. Denn diese Transformationen haben, wie man leicht sieht, entweder keinen oder alle eigentlichen Punkte zu Deckpunkten. *Die uneigentlichen Streckungen bilden also eine Untergruppe G von Ω' .*

Diese Gruppe G ist kommutativ. Haben die uneigentlichen Streckungen α und β nämlich verschiedene Zentren, so folgt $\alpha\beta = \beta\alpha$ sofort aus der „Parallelogrammkonstruktion“. Fallen aber die Zentren zusammen, so zerlege man β in $\gamma \cdot \delta$, worin γ und δ nicht konzentrisch mit α sind. Dann ist $\alpha\beta = \alpha \cdot \gamma \cdot \delta = \gamma\alpha\delta = \gamma\delta\alpha = \beta\alpha$.

Schließlich ist G eine invariante Untergruppe von Ω' . Transformiere nämlich eine Streckung den Punkt P in P' , so transformiert sie auch die durch das Zentrum P bestimmte Untergruppe (P) konzentrischer Streckungen in (P') . Ist nun P uneigentlich, so fällt P' mit P zusammen, (P) selbst ist also schon invariante Untergruppe, demnach auch G .

Dieser Beweis zeigt außerdem, daß die Gruppe Γ' der Ω' -Automorphismen von G intransitiv ist.

¹⁶) Vgl. zu § 8 etwa F. Schur, Grundlagen der Geometrie, Leipzig 1909.

¹⁷) Streckungen bezeichnen wir mit griechischen Buchstaben σ , φ usw. Ihre Verknüpfung gilt als Multiplikation.

§ 10.

Die Operandengruppe G der Schiebungen.

Indem wir uns Γ' zuwenden, betrachten wir von jetzt ab G als Operandengruppe. Diese veränderte Auffassung bringen wir äußerlich dadurch zum Ausdruck, daß wir die uneigentlichen Streckungen $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ die (perspektiven) Schiebungen $a, b, c, \dots$ bezeichnen und ihre Verknüpfung als Addition¹⁸⁾. Die Symbole $\sigma, \varphi, \dots$ der Streckungen benutzen wir auch als Bezeichnung der durch sie hervorgebrachten Automorphismen von G ¹⁹⁾.

Wir sahen in § 9 bereits, daß die Systeme $\Gamma'x$ aus mit x konzentrischen Schiebungen bestehen. Wir erkennen leicht, daß jede mit x konzentrische Schiebung y mittels einer passend gewählten Streckung σ darstellbar ist durch $y = \sigma \cdot x$. Transformiert nämlich x C in A , y C in B , so gibt es eine Streckung σ , die C in C und A in B transformiert. Jetzt ist $\sigma \cdot x$ (d. h. $\sigma \xi \sigma^{-1}$) eine Schiebung, die C in B transformiert. Hierin aber gibt es nur eine, nämlich y . Die Systeme $\Gamma'x$ fallen also nach Ergänzung durch die identische Transformation o mit den Untergruppen konzentrischer Schiebungen zusammen. Alle Bedingungen des Satzes III in § 5 sind erfüllt. Daher gilt:

Satz IV. *Die durch Streckungen hervorgebrachten Automorphismen der Gruppe der Schiebungen bilden zusammen mit dem Automorphismus O ein Zahlensystem mit (vorderer und hinterer) Division.*

§ 11.

Das Zahlensystem Ω/G der Klassen äquivalenter Streckungen.

Die Gruppe K_g , welche aus den mit jeder uneigentlichen Streckung kommutativen Streckungen besteht, fällt mit G zusammen. Ist nämlich α eine uneigentliche Streckung, σ eine beliebige zweite, so folgt aus $\sigma = \sigma \alpha$, daß $\alpha \sigma \alpha^{-1} = \sigma$ ist. Daher transformiert α das Zentrum C von G in sich. Also ist σ uneigentlich.

Klassifizieren wir also die Streckungen modulo G , ergänzen wir ferner die Gruppe Ω' zu Ω durch Hinzufügen der „ausgearteten Streckungen“ (O ²⁰⁾), welche alle eigentlichen Punkte in einen bestimmten Punkt transformieren, können wir nach § 6 sagen:

¹⁸⁾ Die identische Transformation wird also als Operand mit o bezeichnet.

¹⁹⁾ Demnach ist z. B. $\sigma \cdot a$ gleichbedeutend mit $\sigma \alpha \sigma^{-1}$, $\sigma \cdot x$ mit $\sigma \xi \sigma^{-1}$ usw.

²⁰⁾ Die Streckungen O sind nicht zu verwechseln mit der Schiebung 0 , d. h. der identischen Transformation. Diese bedeutet, als Operator aufgefaßt, die 1.

Satz V. Die Klassen modulo G äquivalenter Streckungen bilden ein Zahlensystem Ω/G mit (vorderer und hinterer) Division.

Bekanntlich ist der (bisher nicht benutzte) Paskalsche Satz gleichbedeutend mit dem Satze, daß die Multiplikation unserer Zahlen kommutativ ist und daher beide Divisionen identisch sind.

§ 12.

Das graphische Rechnen mit Zahlen und Vektoren.

1. Operatorgruppe Ω' : Eine eigentliche Streckung mit dem Zentrum C , die P in P' transformiert, stellen wir dar durch den Punkt und den Pfeil PP' (Semikolon). Bei uneigentlichen Streckungen ist durch den Pfeil PP' bestimmt und soll deshalb durch einen PP' durchsetzenden kleinen Kreis wiedergegeben werden (Fig. 1 und 2)²¹.

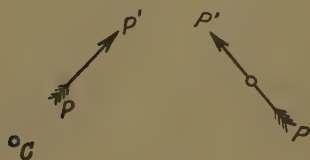


Fig. 1.



Fig. 2.



Fig. 3.

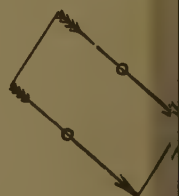


Fig. 4.

Zwei Semikolon sollen gleich heißen, wenn sie dieselbe Streckung darstellen. Gleich sind z. B. die Semikolon der Fig. 3 und 4.

Sind α, β, γ drei Streckungen und ist $\gamma = \beta \cdot \alpha$, so liegen die zugehörigen Zentren $C_\alpha, C_\beta, C_\gamma$ auf einer Geraden. Daraus ergeben sich folgende Konstruktionen des Produktes zweier Semikolon (Fig. 5—7).

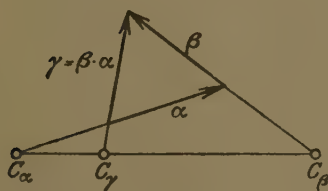


Fig. 5.

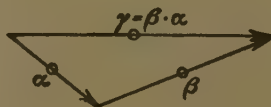


Fig. 6.

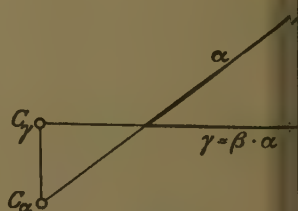


Fig. 7.

In Fig. 5 sind beide Semikolon eigentlich, in Fig. 6 uneigentlich, Fig. 7 ist α eigentlich, β uneigentlich. Von Wichtigkeit ist noch

²¹) Als Achse ω der zentralen Kollineationen ist in den Zeichnungen die unendlich ferne Gerade der Zeichenebene gewählt worden.

Konstruktion des Semikolons $\beta = \sigma \alpha \sigma^{-1}$, wenn α uneigentlich, σ eigentlich ist (Fig. 8).

2. Operandengruppe G : Eine Schiebung stellen wir dar durch einen Pfeil (Vektor). Vektoren, welche dieselbe Schiebung darstellen, gelten als gleich. Die Summe zweier Vektoren wird nach Fig. 9 konstruiert. (Hiermit vergleiche man Fig. 6.)

Der durch Transformation mit σ aus α entstehende „gestreckte“ Vektor $\sigma \cdot \alpha$ ergibt sich nach der Konstruktion von Fig. 8 (Fig. 10).



Fig. 8.

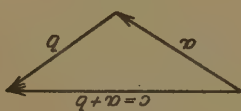


Fig. 9.

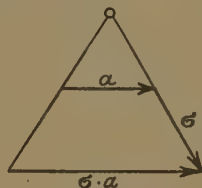


Fig. 10.

3. Zahlensystem Ω/G : Wenn wir zwei Semikolon, die modulo G äquivalente Streckungen darstellen, als äquivalent gelten lassen, so stellen die Semikolon die Zahlen des Systems Ω/G dar²²⁾. Speziell wird die 0 dargestellt durch irgendein Semikolon, dessen Endpunkt P' mit dem Zentrum C zusammenfällt, die 1 durch irgendeines, dessen Endpunkt P' mit dem Anfangspunkt P zusammenfällt, oder durch irgendein uneigentliches.

In Fig. 7 ist $\alpha = \gamma$. Projiziert man α „parallel“ zu $C_\gamma C_\alpha$ auf die „Parallele“ zur Geraden von γ durch C_α , so erhält man ein Semikolon $\gamma' = \alpha$. Da also auch $\gamma' = \gamma$ und die Richtung $C_\gamma C_\alpha$ willkürlich ist, so ergibt sich:

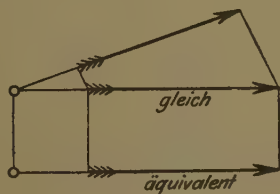


Fig. 11.

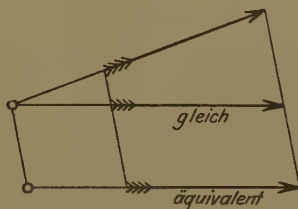


Fig. 11a.

Durch Schiebung geht ein Semikolon in ein äquivalentes über (Fig. 11).

Hieraus folgt:

Durch „Parallelprojektion“ geht ein Semikolon in ein äquivalentes über (Fig. 11a).

²²⁾ Das Zeichen $\equiv$ bedeutet im folgenden diese Äquivalenz.

Man erkennt schließlich leicht:

Äquivalente Semikolon sind stets durch (zwei) Parallelprojektionen ineinander überführbar.

Zur Multiplikation der Semikolon tritt jetzt die Addition. Dabei machen wir von den eben bewiesenen Sätzen Gebrauch, indem wir entweder

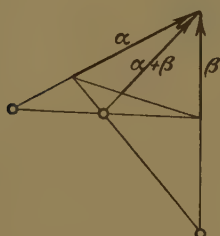


Fig. 12.

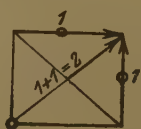


Fig. 13.

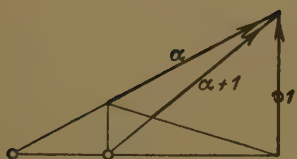


Fig. 14.

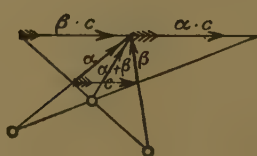


Fig. 15.

Semikolon Anfangs- und Endpunkt zusammenfallen läßt.

4. Vektorenrechnung: Die Streckung eines Vektors nach Fig. 16 bedeutet jetzt, nach Einführung der Äquivalenz der Semikolons, die Multiplikation des Vektors mit einer Zahl. Diese Verknüpfung von Zahl und Vektor ist nach Gleichung (3) in § 1 assoziativ, nach den Gleichungen (4) in § 2 und (11) in § 3 bezüglich Zahl und Vektor distributiv.

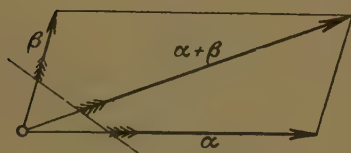


Fig. 16.

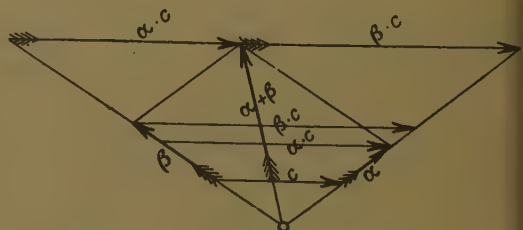


Fig. 17.

Die Semikolonrechnung geht in die Hilbertsche Streckenrechnung über, wenn wir jedem benutzten Semikolon ein äquivalentes mit einem für allemal gegebenem Zentrum O und Anfangspunkt ε zuordnen (und also „Horizont“ ω die unendlich ferne Gerade der Zeichenebene benutzen).

Durch diese Zuordnung werden aber die Konstruktionen der Semikolonrechnung unnötig kompliziert.

§ 13.

Anhang. Die Hessenbergsche Streckenrechnung.

Wenn man die Zahlen unseres Zahlensystems durch Semikolon ein und derselben Geraden g darstellt, so genügt es, wie Hessenberg zeigte, einen Punkt U von g als uneigentlichen oder Fluchtpunkt festzulegen. Als Horizont kann dann jede durch U laufende und von g verschiedene Gerade ω dienen und dieser Horizont darf im Verlaufe der Rechnung durch irgendeine andere von g verschiedene Gerade des Büschels U ersetzt werden.

Legen wir nämlich durch U die Horizonte ω_1 und ω_2 , so haben wir zwei Gruppen Ω_1' und Ω_2' mit Abelschen Untergruppen G_1 und G_2 und zugehörigen Zahlensystemen $\mathfrak{Z}_1 = \Omega_1'/G_1$ und $\mathfrak{Z}_2 = \Omega_2'/G_2$. Irgendein Semikolon von g bedeutet dann eine Zahl von $\mathfrak{Z}_1$ wie von $\mathfrak{Z}_2$ und jede Zahl dieser Systeme läßt sich so darstellen. Nun gilt:

Wenn man zwei Zahlen aus $\mathfrak{Z}_1$ bzw. $\mathfrak{Z}_2$ immer dann als entsprechende Zahlen betrachtet, wenn sie sich durch ein und dasselbe Semikolon von g darstellen lassen, so sind $\mathfrak{Z}_1$ und $\mathfrak{Z}_2$ isomorph aufeinander abgebildet.

Zum Beweise transformiere man durch irgendeine zentrale Kollineation C mit der Achse g ω_1 in ω_2 , also auch Ω_1 in Ω_2 und G_1 in G_2 . Mod G_1 äquivalente Streckungen aus Ω_1 gehen dann in mod G_2 äquivalente Streckungen aus Ω_2 über. C transformiert deshalb auch $\mathfrak{Z}_1$ in $\mathfrak{Z}_2$. Ordnen wir den Elementen von Ω_1 , G_1 , $\mathfrak{Z}_1$ die durch C transformierten von Ω_2 , G_2 , $\mathfrak{Z}_2$ zu, so sind diese Gruppen und Zahlensysteme isomorph bezogen.

Nun ist aber diese Abbildung von $\mathfrak{Z}_1$ auf $\mathfrak{Z}_2$ identisch mit der durch die Semikolon von g hervorgebrachten, weil C jede durch ein Semikolon von g dargestellte Streckung (aus Ω_1) in sich transformiert. Damit ist der Satz bewiesen. Aus ihm folgt:

Äquivalenz, Addition und Multiplikation der Semikolon einer Geraden g sind nur von der Lage des Fluchtpunktes U von g abhängig, unabhängig dagegen davon, welche Gerade $\omega \neq g$ des Büschels U als Horizont dient ²³⁾.

²³⁾ Von diesen Sätzen werden wir in § 15 Gebrauch machen.

III. Geometrischer Teil. Fortsetzung.

§ 14.

Das Zahlensystem Ω/G ist dem der reellen Zahlen isomorph.

Da diese Dinge wiederholt dargestellt worden sind, beschränken wir uns in diesem Paragraphen auf eine kurze Skizze der Beweisführung. Man zeigt *erstens* unter Ausnutzung der Anordnungsaxiome, daß die Klassen äquivalenter Streckungen ebenso geordnet sind wie die eigentlichen Punkte einer Geraden und daß diese Ordnung durch die Transformationen $x' = x + c$ und $x' = c \cdot x$ ($c > 0$) nicht zerstört wird, kurz, daß $\mathfrak{Z} = \Omega/G$ ein „lineares geordnetes Zahlensystem“ ist. Hieraus folgt insbesondere, daß $\mathfrak{Z}$ ein dem Zahlensystem der rationalen Zahlen isomorphes Untersystem enthält.

Man beweist dann *zweitens* etwa mit Hilfe des Dedekindschen Stetigkeitsaxioms der Geometrie der Reihe nach folgende Sätze:

1. Sind α und β positive Streckungen, so gibt es eine ganzzahlige Streckung ν derart, daß $\nu \cdot \alpha > \beta$ ist.
2. Unter denselben Voraussetzungen gibt es eine ganzzahlige Streckung ν derart, daß $\frac{\alpha}{\nu} < \beta$ ist.
3. Die Menge der Rationalzahlen von $\mathfrak{Z} = \Omega/G$ ist relativ dicht zur Menge aller Zahlen von $\mathfrak{Z}$.
4. Die Zahlen von $\mathfrak{Z} = \Omega/G$ bilden eine stetige Menge.

Das Zahlensystem $\mathfrak{Z} = \Omega/G$ läßt sich deshalb kurz als ein „lineares geordnetes stetiges Zahlensystem“ bezeichnen. Zwei derartige Zahlensysteme sind bekanntlich stets und nur auf eine einzige Art isomorph aufeinander abbildbar. Nun bilden die reellen Zahlen der Arithmetik ein solches Zahlensystem. Daher gilt:

Satz VI. *Das Zahlensystem $\mathfrak{Z} = \Omega/G$ ist isomorph, und zwar auf eine einzige Art isomorph dem System der reellen Zahlen.*

§ 15.

Die Wurfrechnung.

Ebenso lassen sich die beiden zu verschiedenen Achsen ω_1 und ω_2 gehörigen Zahlensysteme $\mathfrak{Z}_1$ und $\mathfrak{Z}_2$ nur auf eine Art isomorph beziehen. Sie sind nur verschiedene geometrische Repräsentanten ein und desselben abstrakten Zahlensystems. Entsprechende Zahlen aus $\mathfrak{Z}_1$ und $\mathfrak{Z}_2$ sollen deshalb „gleich“ heißen.

Legen wir durch den Fluchtpunkt U eines Semikolons verschiedene Horizonte $\omega_1, \omega_2, \dots$, so entsprechen σ in $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \dots$ nach § 13 Zahlen

die sich bei isomorpher Abbildung dieser Zahlensysteme aufeinander entsprechen, also — wie wir jetzt sagen können — Zahlen, die sich bei der einzigen überhaupt möglichen isomorphen Abbildung der Zahlensysteme aufeinander entsprechen, kurz „gleiche Zahlen“. Bezeichnen wir daher ein durch seinen Fluchtpunkt ergänztes Semikolon als „projektives Semikolon“ oder „Wurf“, so gilt:

Satz VII. *Jedem projektiven Semikolon (Wurf) entspricht eine reelle Zahl.*

Zwei projektiven Semikolon entspricht dann und nur dann dieselbe Zahl, wenn sie in dem zur Verbindungsgeraden ω ihrer Fluchtpunkte gehörigen Zahlensystem $\mathfrak{S} = \Omega/G$ dieselbe Zahl darstellen, wenn sie also bezüglich ω im früheren Sinne äquivalent sind. Das Äquivalenzkriterium aus § 12, 3 geht daher über in dem Satz: Zwei projektiven Semikolon entspricht stets und nur dann dieselbe reelle Zahl, wenn das eine durch eine oder mehrere Projektionen in das andere transformierbar ist. M. a. W.

Satz VIII. *Die einem projektiven Semikolon (Wurf) zugeordnete Zahl ist eine charakteristische absolute projektive Invariante.*

Das Rechnen mit Würfeln vollzieht sich ganz nach den Konstruktionen der Semikolonrechnung. Als Horizont dient jeweilig die Verbindungslinie der Fluchtpunkte der beiden zu verknüpfenden Würfe.



Fig. 18.



Fig. 19.

Als Buchstabensymbol der einem Wurf zukommenden Invariante diene $(ABCD)$. Hierin bedeutet A den Fluchtpunkt, B das Zentrum, C den Anfangspunkt und D den Endpunkt des projektiven Semikolons. Um die Invariante als Doppelverhältnis darzustellen, entnehme man Fig. 18 die Möbiussche Relation

$$(ABXY)(ABYZ) = (ABXZ),$$

woraus

$$(ABXY)(ABYX) = 1$$

folgt, ferner Fig. 19, die als Spezialfall von Fig. 12 aufzufassen ist,

$$(ABXY) + (AXBY) = 1.$$

Schließlich ist

$$(ABXY) = (BAYX),$$

weil man bekanntlich das erste Quadrupel durch drei Projektionen in das zweite überführen kann. Mit Hilfe dieser Relationen ergibt sich in bekannter Weise

$$(P_1 P_2 P_3 P_4) = \frac{p_3 - p_1}{p_3 - p_2} \cdot \frac{p_4 - p_1}{p_4 - p_2},$$

wenn

$$p_i = (ABC P_i) \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

ist und ABC drei verschiedene Punkte einer Geraden, $P_1 P_2 P_3 P_4$ vier Punkte derselben Geraden sind, von denen keine drei zusammenfallen.

(Eingegangen am 4. Juni 1918.)

Über Moduln und Gruppen hyperkomplexer Größen.

Von

Werner Schmeidler in Göttingen.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Gesamtheit der Restklassen eines beliebigen Moduls von endlich vielen Variablen, dessen Koeffizienten einem bestimmten Körper P angehören. Diese Restklassen bilden eine „Gruppe hyperkomplexer Größen in P “ von im allgemeinen abzählbar unendlicher Ordnung, ein Begriff, der zu Beginn des ersten Paragraphen aufgestellt wird. Die dort gegebene Definition umfaßt allgemeinere als die nachher bei den Moduln auftretenden Gruppen; insbesondere wird das kommutative Gesetz der Multiplikation für die Größen der Gruppe nicht gefordert, da es für die späteren Sätze nicht gebraucht wird. Für diese Gruppen wird nun ein bestimmter Prozeß untersucht, den im Falle endlicher Gruppen und für den Bereich aller komplexen Zahlen schon Herr Scheffers (*Zurückführung komplexer Zahlensysteme auf typische Formen* [Mathematische Annalen Bd. XXXIX (1891), S. 293 bis 390; im folgenden zitiert mit Sch. I], S. 317 u. ff.) untersucht hat. Es ergibt sich eine Scheidung aller Gruppen in „reduzible“ und „irreduzible“; der Hauptsatz dieses Paragraphen (Satz II) besagt, daß jede Gruppe, die überhaupt als „Summe“ von endlich vielen irreduziblen Gruppen darstellbar ist, diese irreduziblen Bestandteile eindeutig bestimmt. Auch dieser Satz findet sich für den erwähnten Spezialfall bereits bei Herrn Scheffers (*Über die Reduzibilität komplexer Zahlensysteme* [Mathematische Annalen Bd. XLI (1893), S. 601–604])¹⁾.

Im zweiten Paragraphen wird dies auf die Theorie der Moduln angewendet. Die Gruppe der Restklassen eines beliebigen Moduls hat die Eigenschaften des Satzes II und ist daher eindeutig in irreduzible Bestandteile reduzibel. Um dies für die Theorie der Moduln zu verwerten,

¹⁾ Ein in meiner Dissertation, *Über homogene kommutative Gruppen hyperkomplexer Größen und ihre Zerlegung in unzerlegbare Faktoren*, Göttingen 1917 (S. 14, Anmerkung ¹⁾) angedeuteter Einwand gegen den Scheffersschen Beweis im nicht-kommutativen Falle ist irrig.

bedarf es einmal des Begriffes der „Klasse“, die alle Moduln umfaßt, deren Gruppen der Restklassen zueinander isomorph sind, andererseits einer Untersuchung darüber, wie sich Reduzibilität und Irreduzibilität der Gruppen bei den zugehörigen Moduln bzw. Klassen äußert. Es ergibt sich der einfache, bei endlichen Gruppen und für den Bereich aller komplexen Zahlen schon von Herrn Fuß (*Modulsysteme und höhere komplexe kommutative Zahlssysteme* [Inaugural-Dissertation, Kiel 1913, 70 Seiten], S. 64)) aufgestellte Satz (Satz III), daß die Gruppe der Restklassen eines Moduls dann und nur dann reduzibel ist, wenn der Modul als kleinstes gemeinsames Vielfache zweier teilerfremden Moduln in dem betreffenden Körper darstellbar ist. Dieser Satz gestattet es, von der „Reduzibilität der Klassen“, „irreduziblen Klassen“ usw. zu sprechen; es ergibt sich dann aus Satz II und III, daß jede Klasse eindeutig in irreduzible Klassen reduzibel ist (Satz IV), womit das Ziel der Arbeit erreicht ist.

Über den Zusammenhang dieser Untersuchung mit der bekannten Arbeit des Herrn Lasker (*Zur Theorie der Moduln und Ideale* [Mathematische Annalen Bd. LX (1905), S. 20—116]), in der (auf Seite 51)) jeder Modul als kleinstes gemeinsames Vielfache von primären Moduln dargestellt wird, gibt ebenfalls Satz III Auskunft. Will man überhaupt die Zerspaltung eines einzelnen Moduls mit der einer Klasse in Parallelen setzen, so zeigt sich, daß zwar die Zerspaltung des Moduls in primäre Moduln weiter führt als die der Klassen in irreduzible Klassen, weil ein zu einer irreduziblen Klasse gehörender Modul sehr wohl als kleinstes gemeinsames Vielfache verschiedener primärer Moduln darstellbar sein kann, während umgekehrt jeder primäre Modul zu einer irreduziblen Klasse gehört, daß aber andererseits bei der Zerspaltung der Klassen die Eindeutigkeit gewahrt bleibt, während diese bei Herrn Lasker verloren geht, wie bekannt ist und wie einfache Beispiele lehren.

§ 1.

Es sei P ein beliebiger Körper²⁾. Es sei $\mathfrak{A}$ eine Menge von Elementen mit folgenden Eigenschaften:

1. Die Summe zweier Elemente sowie das Produkt eines Elementes mit einer Zahl in P sind definiert und wiederum Elemente von $\mathfrak{A}$. Es gilt das kommutative, assoziative und distributive Gesetz der Addition und dieser Multiplikation, sowie das Gesetz der unbeschränkten und eindeutigen Subtraktion.

²⁾ Im Sinne der Arbeit des Herrn Steinitz, *Algebraische Theorie der Körper*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 137 (1910), S. 167—309.

2. Das Produkt zweier Elemente von $\mathfrak{A}$ ist definiert und wieder ein Element von $\mathfrak{A}$. Es gilt das assoziative Gesetz der Multiplikation, sowie das distributive Gesetz der Addition und Multiplikation. Es existiert eine Eins, d. h. ein Element, dessen vorderes sowie hinteres Produkt mit jedem Elemente von $\mathfrak{A}$ dieses reproduziert.

3. Es gibt eine endliche oder abzählbar unendliche Basis in $\mathfrak{A}$; d. h. ein System von endlich oder abzählbar unendlich vielen Elementen $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \dots$, so daß jedes Element $\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{A}$ in der Form

$$\mathfrak{x} = a_1 \mathfrak{x}_1 + a_2 \mathfrak{x}_2 + \dots$$

dargestellt ist, wobei die Koeffizienten $a_1, a_2, \dots$ dem Körper P angehören und, abgesehen von höchstens endlich vielen, sämtlich verschwinden. Andererseits soll eine lineare Beziehung mit höchstens endlich vielen von null verschiedenen Koeffizienten in P von der Form

$$c_1 \mathfrak{x}_1 + c_2 \mathfrak{x}_2 + \dots = 0$$

unmöglich sein, falls

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 0, \quad \dots$$

2); d. h. die Elemente $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \dots$ sollen linear unabhängig sein³⁾.

Sind diese Bedingungen erfüllt, so heißen die Elemente von $\mathfrak{A}$ *hyperkomplexe Größen* oder kurz *Größen*, $\mathfrak{A}$ selbst heißt eine *Gruppe hyperkomplexer Größen im Körper P* . Die Gruppe heißt speziell *kommutativ*, wenn auch das kommutative Gesetz der Multiplikation zwischen zwei beliebigen Größen gilt.

Ist $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \dots$ eine beliebige andere Basis von $\mathfrak{A}$, so bestehen nach (1) die Gleichungen

$$\mathfrak{y}_1 = a_{11} \mathfrak{x}_1 + a_{12} \mathfrak{x}_2 + \dots$$

$$\mathfrak{y}_2 = a_{21} \mathfrak{x}_1 + a_{22} \mathfrak{x}_2 + \dots$$

$$\dots \dots \dots$$

ähnend auch umgekehrt

$$\mathfrak{x}_1 = A_{11} \mathfrak{y}_1 + A_{12} \mathfrak{y}_2 + \dots$$

$$\mathfrak{x}_2 = A_{21} \mathfrak{y}_1 + A_{22} \mathfrak{y}_2 + \dots$$

$$\dots \dots \dots$$

2); in beiden Systemen stehen rechts in jeder Zeile nur endlich viele von null verschiedene, dem Körper P angehörende Koeffizienten. Die beiden durch (2) und (3) bestimmten Matrizen A und A^{-1} sind also „zeilenweise invertierbar“, und es besteht die Relation, die sich durch Einsetzen von (3) in (2)

³⁾ Natürlich könnte man auf diese Forderung verzichten, weil aus jeder Folge $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \dots$ von Elementen, durch die jedes Element $\mathfrak{x}$ in der Form (1) dargestellt werden kann, eine Teilfolge von linear unabhängigen Elementen ausgewählt werden kann. Aber nur eine solche Folge heißt eine Basis.

und umgekehrt wegen der linearen Unabhängigkeit der Größen $\xi_1, \xi_2, \dots$ und $\eta_1, \eta_2, \dots$ ergibt:

$$(4) \quad A A^{-1} = A^{-1} A = E.$$

Hierbei bedeutet E die Einheitsmatrix der betreffenden Ordnung.

Ist umgekehrt A eine beliebige abgeschlossene zeilenfinite Matrix im Körper, d. h. eine solche, die eine eindeutige — alsdann ebenfalls zeilenfinite⁴⁾ — Reziproke A^{-1} besitzt, so bilden die durch die Gleichungen (2) definierten Größen $\eta_1, \eta_2, \dots$ eine Basis. Denn einerseits sind sie linear unabhängig; sei in der Tat

$$c_1 \eta_1 + c_2 \eta_2 + \dots = 0,$$

so folgt aus (4), wenn wir das Schema der Koeffizienten $c_1, c_2, \dots$ durch Hinzufügung entsprechend vieler aus Nullen bestehender Zeilen zu einer quadratischen Matrix C ergänzen, durch linksseitige Multiplikation mit C , daß

$$c_1 = 0, c_2 = 0, \dots$$

sein muß. Andererseits kann jede Größe der Gruppe durch endlich viele $\xi_1, \xi_2, \dots$ linear dargestellt werden mit Koeffizienten in P , also wegen (3) auch durch endlich viele $\eta_1, \eta_2, \dots$.

Die Anzahl der Elemente einer Basis von $\mathfrak{A}$, die unabhängig ist von der speziellen Wahl der Basis, heißt die *Ordnung* der Gruppe. Sie ist endlich oder abzählbar unendlich.

Eine Gruppe hyperkomplexer Größen im Körper P heißt *reduzibel* in diesem Körper, wenn es in ihr zwei Untergruppen $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ gibt, die folgende Eigenschaften haben:

1. Jedes Produkt zweier Größen, von denen die eine zu $\mathfrak{A}_1$, die andere zu $\mathfrak{A}_2$ gehört, ist Null.

2. Jede Größe ξ der Gruppe $\mathfrak{A}$ ist in der Form

$$(5) \quad \xi = \xi + \eta$$

darstellbar, wobei ξ zu $\mathfrak{A}_1$, η zu $\mathfrak{A}_2$ gehört.

3. Die Darstellung (5) ist eindeutig; d. h. aus

$$\xi + \eta = 0$$

folgt $\xi = 0$ und $\eta = 0$, wenn ξ zu $\mathfrak{A}_1$ und η zu $\mathfrak{A}_2$ gehört.

Von selbst sind alsdann $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ Gruppen hyperkomplexer Größen in P . Insbesondere ist die Haupteinheit von $\mathfrak{A}$ die Summe der Haupteinheiten von $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$.

⁴⁾ Vgl. die Arbeit des Herrn Toeplitz, Über die Auflösung unendlichvieler linearer Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Bd. XXVIII (1909), S. 88–96, [S. 91–92].

Wir schreiben dann nach Herrn Scheffers⁵⁾

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2$$

und nennen $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ in $\mathfrak{A}$ enthalten, oder auch *Bestandteile* von $\mathfrak{A}$.

Ist die Gruppe $\mathfrak{A}$ kommutativ, so sind auch $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ kommutativ.

Gehen wir umgekehrt von zwei beliebigen Gruppen $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ aus, heißt die durch die Eigenschaften 1. bis 3. definierte Gruppe $\mathfrak{A}$ die *Summe* der beiden Gruppen $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$. $\mathfrak{A}$ ist wiederum eine Gruppe hyperkomplexer Größen in P . Die Summe zweier kommutativer Gruppen ist kommutativ.

Die Definition von $\mathfrak{A}$ ist symmetrisch in $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$; daher ist

$$\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}_2 + \mathfrak{A}_1.$$

Ferner gilt das assoziative Gesetz:

$$\mathfrak{A}_1 + (\mathfrak{A}_2 + \mathfrak{A}_3) = (\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2) + \mathfrak{A}_3,$$

jede Größe dieser Gruppe eindeutig als Summe von drei Größen darstellbar ist, die respektive zu $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$ gehören, und das Produkt von zwei Größen, die verschiedenen der drei Gruppen angehören, verschwindet.

Endlich folgt aus

$$\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_3$$

stets

$$\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}_3.$$

Wenn bezeichnen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ Größen von $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$, so ist nach Voraussetzung jede Größe in der Form $\mathfrak{x} + \mathfrak{y}$ bzw. $\bar{\mathfrak{x}} + \mathfrak{z}$ darstellbar; es ist also

$$\mathfrak{x} - \bar{\mathfrak{x}} = \mathfrak{z} - \mathfrak{y},$$

oder wegen 1. durch Multiplikation mit der Haupteinheit von $\mathfrak{A}_1$

$$\mathfrak{x} - \bar{\mathfrak{x}} = 0,$$

$$\mathfrak{x} = \bar{\mathfrak{x}},$$

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{z}.$$

Daraus folgt die Behauptung.

Eine Gruppe, die in keiner Weise als Summe zweier Gruppen dargestellt werden kann, heißt *irreduzibel*.

Zwei Gruppen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ in demselben Körper P heißen *isomorph*, wenn es eine eindeutige Zuordnung zwischen ihren Größen derart gibt, daß der Summe und dem Produkt zweier Größen in $\mathfrak{A}$ die Summe und das Produkt der zugeordneten Größen in $\mathfrak{B}$ zugeordnet ist. Es ist klar, daß dabei die Haupteinheiten der beiden Gruppen einander entsprechen. Ist

⁵⁾ Sch. I, S. 323.

ferner $\mathfrak{A}$ reduzibel in $\mathfrak{P}$, so ist auch $\mathfrak{B}$ reduzibel in $\mathfrak{P}$, und die in $\mathfrak{A}$ enthaltenen Gruppen sind respektive zu den in $\mathfrak{B}$ enthaltenen Gruppen isomorph. Ebenso ist die Summe zweier Gruppen isomorph zu der Summe zweier zu den beiden Gruppen isomorphen Gruppen. Ist eine Gruppe kommutativ, so ist auch jede zu ihr isomorphe Gruppe kommutativ. Alle bisherigen Überlegungen bleiben daher gültig, wenn man das Wort „Gruppe“ im abstrakten Sinne auffaßt, d. h. die Gesamtheit aller zu einer Gruppe isomorphen Gruppen als ein Individuum betrachtet.

Satz I. *Ist eine irreduzible Gruppe in der Summe zweier Gruppen enthalten, so ist sie in einer der beiden Gruppen selbst enthalten.*

$\mathfrak{A}$ sei die irreduzible Gruppe, $\mathfrak{C} + \mathfrak{D}$ die gegebene Summe zweier Gruppen, die $\mathfrak{A}$ enthält. Es sei also

$$\mathfrak{C} + \mathfrak{D} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}.$$

Ferner bezeichne $x_1, x_2, \dots, y_1, y_2, \dots, z_1, z_2, \dots, t_1, t_2, \dots$ je eine Basis von $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$. Dann ist

$$(9) \quad \begin{aligned} z_i &= \sum_k a_{2i-1,k} x_k + \sum_l b_{2i-1,l} y_l & (i = 1, 2, \dots) \\ t_j &= \sum_k a_{2j,k} x_k + \sum_l b_{2j,l} y_l, & (j = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

wobei in jeder Linearform rechts nur endlich viele von Null verschiedene Koeffizienten vorkommen, die dem gegebenen Körper angehören. Ferner ist die Matrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & b_{11} & a_{12} & b_{12} & \dots \\ a_{21} & b_{21} & a_{22} & b_{22} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

abgeschlossen. Nach der Voraussetzung ist sowohl

$$(10) \quad \begin{aligned} z_i t_j &= 0, & (i = 1, 2, \dots) \\ t_j z_i &= 0, & (j = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

als auch

$$(11) \quad \begin{aligned} x_k y_l &= 0, & (k = 1, 2, \dots) \\ y_l x_k &= 0. & (l = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

Aus (10) folgt nun durch Einsetzen der Ausdrücke (9), wenn man noch (11) berücksichtigt und den der Gruppe $\mathfrak{A}$ angehörigen Bestandteil der Größe z_i , kurz den $\mathfrak{A}$ -Bestandteil von z_i , mit $\bar{z}_i$, denjenigen der Größe t_j mit $\bar{t}_j$ bezeichnet,

$$(12) \quad \begin{aligned} \bar{z}_i \bar{t}_j &= 0, & (i = 1, 2, \dots) \\ \bar{t}_j \bar{z}_i &= 0, & (j = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

wie entsprechende Gleichungen für die der Gruppe $\mathfrak{B}$ angehörigen Bestandteile.

Nun betrachte ich die Formen $\bar{z}_i$ der Reihe nach. Ist eine dieser Formen von den vorangehenden linear abhängig, so ersetze ich die zugehörige Größe z_i durch eine solche lineare Verbindung mit den vorangehenden z_i , daß in dieser der $\mathfrak{A}$ -Bestandteil verschwindet. Die so entstehenden Linearformen, die wir wieder mit z_i bezeichnen, bilden dann oder eine Basis der Gruppe $\mathfrak{C}$, haben aber jetzt die Eigenschaft, daß ihre $\mathfrak{A}$ -Bestandteile, soweit sie von Null verschieden sind, ein System linear unabhängiger Größen in $\mathfrak{A}$ bilden. Entsprechend verfähre ich mit den Größen t_j ; auch in ihnen bilden dann die $\mathfrak{A}$ -Bestandteile, soweit sie von Null verschieden sind, ein System linear unabhängiger Größen in $\mathfrak{A}$. Natürlich müssen alsdann die $\mathfrak{B}$ -Bestandteile derjenigen Größen z_i und t_j , deren $\mathfrak{A}$ -Bestandteile verschwinden, ebenfalls linear unabhängige Größen $\mathfrak{B}$ sein.

Nun bilden die $\mathfrak{A}$ -Bestandteile $\bar{z}_i$ der Größen z_i , wenn sie nicht sämtlich verschwinden, die Basis einer Untergruppe $\mathfrak{A}_1$ von $\mathfrak{A}$. In der $\mathfrak{A}_1$ gehören Summe und Produkt zweier Größen von $\mathfrak{A}_1$, die als $\mathfrak{A}$ -Bestandteile einer Größe von $\mathfrak{C}$ auftreten können, wiederum zu diesen Größen. Ferner $\bar{z}_1$ die Haupteinheit der Gruppe $\mathfrak{C}$, so ist $\bar{z}_1$ die Haupteinheit in $\mathfrak{A}_1$; denn aus $\bar{z}_1 \bar{z}_i = \bar{z}_i \bar{z}_1 = \bar{z}_i$ folgt

$$3) \quad \bar{z}_1 \bar{z}_i = \bar{z}_i \bar{z}_1 = \bar{z}_i.$$

Genau ebenso beweist man, daß auch die Größen $\bar{t}_j$ entweder sämtlich verschwinden oder die Basis einer Untergruppe $\mathfrak{A}_2$ von $\mathfrak{A}$ bilden. Selbstverständlich gehören $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ zum Körper $\mathfrak{P}$.

Hieraus folgt nun

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2.$$

Nach (12) ist nämlich die erste Bedingung der Reduzibilität von $\mathfrak{A}$ erfüllt; die zweite gilt ebenfalls, weil jede Größe der gegebenen Gruppe nach z_i und t_j , also jede Größe von $\mathfrak{A}$ durch $\bar{z}_i$ und $\bar{t}_j$ linear dargestellt werden kann. Diese Darstellung ist eindeutig; denn aus

$$a_1 \bar{z}_1 + a_2 \bar{z}_2 + \dots + b_1 \bar{t}_1 + b_2 \bar{t}_2 + \dots = 0$$

folgt durch Multiplikation mit $\bar{z}_1$ nach (12) und (13)

$$a_1 \bar{z}_1 + a_2 \bar{z}_2 + \dots = 0,$$

so auch

$$b_1 \bar{t}_1 + b_2 \bar{t}_2 + \dots = 0,$$

h. die Gültigkeit von 3.

Nach Voraussetzung sollte aber $\mathfrak{A}$ irreduzibel sein; es sind daher ent-

weder alle Größen $\bar{z}_i$ oder alle Größen $\bar{t}_j$ gleich Null. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann das letztere angenommen werden.

Dann bilden die $\mathfrak{B}$ -Bestandteile der Größen t_j und derjenigen Größen z_i , deren $\mathfrak{A}$ -Bestandteile verschwinden, ein System linear unabhängiger Größen in $\mathfrak{B}$, genauer sogar eine Basis in $\mathfrak{B}$. Denn jede Größe in $\mathfrak{B}$ läßt sich durch die Größen z_i und t_j , also, da die von Null verschiedenen $\mathfrak{A}$ -Bestandteile der z_i voneinander linear unabhängig sind, durch die Größen t_j und diejenigen z_i linear darstellen, deren $\mathfrak{A}$ -Bestandteile verschwinden. Insbesondere gilt dies daher auch von den $\mathfrak{B}$ -Bestandteilen derjenigen Größen z_i , deren $\mathfrak{A}$ -Bestandteile von Null verschieden sind. Wir werden sehen, daß bei der Darstellung dieser Größen höchstens die der Gruppe $\mathfrak{C}$ angehörigen $\mathfrak{B}$ -Bestandteile wirklich vorkommen können. In der Tat bilden die sämtlichen Größen von $\mathfrak{B}$, die als $\mathfrak{B}$ -Bestandteile einer Größe von $\mathfrak{C}$ auftreten können, eine Untergruppe $\mathfrak{B}_1$ von $\mathfrak{B}$, die mit der mit $\mathfrak{D}$ identischen entsprechend bestimmten Untergruppe $\mathfrak{B}_2$ von $\mathfrak{B}$ keine Größe gemeinsam hat; man zeigt nämlich entsprechend wie oben

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_2.$$

Daher können wir schließlich für diejenigen Größen z_i , deren $\mathfrak{A}$ -Bestandteile nicht verschwinden, gewisse lineare Verbindungen mit den übrigen so einführen, daß ihre $\mathfrak{B}$ -Bestandteile sämtlich Null sind. Hieraus ergibt sich aber sofort

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}_1,$$

und der Satz ist bewiesen.

Satz II. Jede Gruppe, die als Summe von endlich vielen irreduziblen Gruppen darstellbar ist, ist eindeutig in irreduzible Bestandteile reduzibel.

Der Beweis dieses Satzes erfolgt auf Grund des Satzes I und der Eigenschaften (6), (7), (8) der reduziblen Gruppen ganz nach dem bekannten Schema; am einfachsten in Form eines Induktionsschlusses, bei dem man die Richtigkeit bei den Gruppen voraussetzt, die als Summe von $k - 1$ irreduziblen Bestandteilen darstellbar sind, und dann auf seine Gültigkeit bei solchen Gruppen schließt, die als Summe von k irreduziblen Bestandteilen darstellbar sind. Die genauere Ausführung kann wohl übergegangen werden.

Satz I und II gelten auch dann, wenn das Wort Gruppe im abstrakten Sinne aufgefaßt wird.

§ 2.

Es bezeichne

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(x_1, \dots, x_m)$$

einen Modul im Bereiche der Variablen $x_1, \dots, x_m$, dessen Funktionen in allgemeinen inhomogen sein sollen und dessen Koeffizienten den Körper

stimmen mögen. Es sei $\mathfrak{M}$ die Gesamtheit der Restklassen mod $\mathfrak{M}$; diese wird repräsentiert durch ein System von Funktionen von $x_1, \dots, x_m$ mit Koeffizienten in P , die mod $\mathfrak{M}$ voneinander verschieden sind, während jede Funktion von $x_1, \dots, x_m$ einer und nur einer der Funktionen des Systems mod $\mathfrak{M}$ kongruent ist. Daß ein solches System von Funktionen stets existiert, außer im Falle $\mathfrak{M} = 1$, wo jede Funktion durch $\mathfrak{M}$ teilbar ist, und $\mathfrak{M}$ nur die Restklasse 0 enthält, davon überzeugt man sich z. B. folgendermaßen:

Wir denken uns die sämtlichen durch den Modul $\mathfrak{M}$ teilbaren Funktionen nach wachsenden Graden geordnet und wählen aus ihnen ein System von abzählbar unendlich vielen Funktionen aus, indem wir für jeden Grad eine Höchstanzahl von solchen Funktionen aufschreiben, deren nächste Bestandteile linear unabhängig sind, so daß also jede durch $\mathfrak{M}$ teilbare Funktion dieses Grades bis auf Glieder niedrigeren Grades durch diese Funktionen linear dargestellt werden kann. Für jeden Grad $\alpha \geq r$, worin r der niedrigste Grad ist, den eine Funktion von $\mathfrak{M}$ besitzen kann, erhalten wir so eine endliche Anzahl durch $\mathfrak{M}$ teilbarer Funktionen, deren Gesamtsystem S die Eigenschaft besitzt, daß jede durch $\mathfrak{M}$ teilbare Funktion als lineare Verbindung endlich vieler Funktionen von S dargestellt werden kann. In der Tat gibt es, wenn f eine beliebige durch $\mathfrak{M}$ teilbare Funktion α^{ten} Grades ist, eine lineare Verbindung von f mit endlich vielen Funktionen von S , deren Grad $< \alpha$ ist und die zu $\mathfrak{M}$ gehört; wird die Behauptung daher für die Funktionen der Grade $< \alpha$ bereits als bewiesen angenommen, so gilt sie allgemein. Nun ist offenbar, daß jede durch $\mathfrak{M}$ teilbare Funktion r^{ten} Grades eine lineare Verbindung der Funktionen r^{ten} Grades in S , weil andernfalls eine von Null verschiedene Funktion niedrigeren als r^{ten} Grades durch $\mathfrak{M}$ teilbar wäre. Daher gilt die Behauptung für $\alpha = r$, also allgemein.

Nun konstruieren wir zu dem System S ein „komplementäres“ System Σ von Formen in folgender Weise: Ist $r = 0$, so enthält Σ keine Funktion; $\mathfrak{M}$ enthält dann nur die Restklasse 0, der Modul $\mathfrak{M}$ ist gleich 1. Ist $r > 0$, so nehmen wir für $\alpha < r$ alle Potenzprodukte α^{ter} Dimension in $x_1, \dots, x_m$ in das System Σ auf; für $\alpha \geq r$ solche Potenzprodukte α^{ter} Dimension von $x_1, \dots, x_m$, die zusammen mit den höchsten Bestandteilen der Funktionen α^{ten} Grades in S ein vollständiges System linear unabhängiger Formen α^{ten} Grades von $x_1, \dots, x_m$ bilden. Die so erhaltenen höchstens abzählbar unendlich vielen Formen haben alsdann die Eigenschaft, mod $\mathfrak{M}$ linear unabhängig zu sein, während jede Funktion von $x_1, \dots, x_m$ einer linearen Verbindung von endlich vielen Formen von Σ mod $\mathfrak{M}$ kongruent ist. Letzteres ist nämlich trivial für alle Funktionen des Grades $< r$; für jede Funktion vom Grade $\alpha \geq r$ gibt es aber eine

lineare Verbindung mit endlich vielen Funktionen von S und Σ von Grade α , die selbst einen Grad $< \alpha$ besitzt. Die Behauptung gilt daher allgemein, weil sie für die kleinsten Grade richtig ist. Eine lineare Verbindung von endlich vielen Funktionen von Σ kann ferner nicht durch 92 teilbar, d. h. als lineare Verbindung endlich vieler Funktionen von darstellbar sein; dies ergibt sich sofort aus der Betrachtung der Glieder höchsten Grades.

Die Gesamtheit aller linearen Verbindungen der Funktionen von bildet daher das System, dessen Existenz nachgewiesen werden sollte; in der Tat gehören ja die Koeffizienten, weil nur aus den Zahlen 0 und bestehend, dem Körper P an. Es ist ferner klar, daß jede dieser Funktionen noch um eine beliebige durch $\mathfrak{M}$ teilbare Funktion vermehrt werden kann, da es sich ja nur um die Restklassen mod $\mathfrak{M}$ handelt.

Diese bilden nun, wie leicht zu verifizieren ist, eine kommutative Gruppe hyperkomplexer Größen im Körper P , deren Ordnung durch die Anzahl der Funktionen des Systems Σ bestimmt wird. Sind nämlich $\xi_1, \xi_2, \dots$ die Restklassen der Funktionen des Systems Σ , so ist einerseits eine lineare Beziehung

$$c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 + \dots = 0$$

mit endlich vielen Gliedern linker Hand nur möglich, falls

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 0, \quad \dots$$

ist, während andererseits jede Restklasse ξ mod $\mathfrak{M}$ in der Form

$$\xi = a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + \dots$$

darstellbar ist, worin höchstens endlich viele der zu P gehörenden Koeffizienten $a_1, a_2, \dots$ von Null verschieden sind. Die Restklassen $\xi_1, \xi_2, \dots$ bilden daher eine Basis der Gruppe $\mathfrak{A}$.

Es sei nun

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{N}(y_1, \dots, y_n)$$

ein zweiter Modul, dessen Funktionen von den Variablen $y_1, \dots, y_n$ abhängen, dessen Koeffizienten aber ebenfalls den Körper P bestimmen. $\mathfrak{B}$ sei die Gruppe der Restklassen aller Funktionen von $y_1, \dots, y_n$ mit Koeffizienten in P mod $\mathfrak{N}$. Dann ist $\mathfrak{B}$ eine kommutative Gruppe hyperkomplexer Größen im Körper P . Ist nun $\mathfrak{A}$ zu $\mathfrak{B}$ isomorph, so nennen wir $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ äquivalent⁶⁾ und rechnen beide Moduln zu derselben Klasse

Zu jeder Klasse von Moduln gehört also eindeutig eine bestimmte — abstrakt aufgefaßte — kommutative Gruppe hyperkomplexer Größen

⁶⁾ Vgl. meine Arbeit, Zur Theorie der primären Punktmoduln, Mathematische Annalen, Bd. LXXVIII (1918), S. 56–75 [S. 60].

Umgekehrt kann zwar nicht behauptet werden, daß zu jeder abstrakt aufgefaßten kommutativen Gruppe hyperkomplexer Größen eine Klasse von Moduln gehört, die je einem endlich-dimensionalen Variablenraum angehören⁷⁾; ist dies aber der Fall, so ist auch diese Zuordnung eindeutig, d. h. die Zuordnung der Gruppen und Klassen ist in allen Fällen, in denen sie existiert, eineindeutig.

Satz III. Die Gruppe $\mathfrak{A}$ der Restklassen mod $\mathfrak{M}$ ist dann und nur dann reduzibel im Körper P der Koeffizienten von $\mathfrak{M}$, wenn

$$\mathfrak{M} = [\mathfrak{N}, \mathfrak{L}]$$

als kleinstes gemeinsames Vielfache zweier teilerfremden Moduln $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{L}$ darstellbar ist, deren Koeffizienten ebenfalls dem Körper P angehören.

a) Es sei

$$\mathfrak{M} = [\mathfrak{N}, \mathfrak{L}],$$

wobei $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}(x_1, \dots, x_m)$ und $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}(x_1, \dots, x_m)$ zwei Moduln mit Koeffizienten in P bedeuten, für die zwei Funktionen

$$13) \quad N \equiv 0 \text{ mod } \mathfrak{N}$$

und

$$14) \quad L \equiv 0 \text{ mod } \mathfrak{L}$$

existieren, so daß

$$15) \quad N + L = 1$$

t. Aus (14) und (15) folgt

$$N \equiv 1 \text{ mod } \mathfrak{L},$$

aus (13) und (15)

$$L \equiv 1 \text{ mod } \mathfrak{N}.$$

Hieraus ergibt sich in Verbindung mit (13) und (14)

$$N(N - 1) \equiv 0 \text{ mod } \mathfrak{M},$$

$$16) \quad N^2 \equiv N \text{ mod } \mathfrak{M},$$

und ebenso

$$17) \quad L^2 \equiv L \text{ mod } \mathfrak{M}.$$

⁷⁾ Um dies einzusehen, braucht man nur von einer Gruppe auszugehen, die als Summe von unendlich vielen Gruppen darstellbar ist; eine solche kann, wie weiter unten gezeigt wird, niemals zu der Gruppe der Restklassen eines endlichen Moduls isomorph sein.

Aus (13) und (14) folgt ferner

$$(18) \quad N L \equiv 0 \bmod \mathfrak{M}.$$

Ist nun n bzw. l die durch die Funktionen N bzw. L erzeugte Restklasse mod $\mathfrak{M}$ und durchläuft z alle Größen von $\mathfrak{A}$, so durchläuft $n z$ alle Größen einer Untergruppe $\mathfrak{A}_1$ von $\mathfrak{A}$, weil wegen (16)

$$n z_1 n z_2 = n^2 z_1 z_2 = n z_1 z_2$$

ist. Ebenso durchlaufen die Größen $l z$ eine Untergruppe $\mathfrak{A}_2$ von $\mathfrak{A}$, und nach (18) ist

$$z \eta = \eta z = 0,$$

wenn z zu $\mathfrak{A}_1$, η zu $\mathfrak{A}_2$ gehört. Nach (15) ist ferner jede Größe z von $\mathfrak{A}$ in der Form

$$z = n z + l z = z + \eta$$

darstellbar, und die Darstellung ist eindeutig, weil aus

$$z + \eta = 0$$

durch Multiplikation mit n nach (16) und (18)

$$z = 0,$$

also

$$\eta = 0$$

folgt.

b) Es sei

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2$$

die Gruppe der Restklassen mod $\mathfrak{M}$. Nehmen wir das System aller der sämtlichen Größen von $\mathfrak{A}_2$ darstellenden Funktionen von $x_1, \dots, x_m$ zu den Funktionen von $\mathfrak{M}$ noch hinzu, so erhalten wir einen Modul $\mathfrak{N}$ im Körper P , dessen Gruppe der Restklassen sich genau auf die Gruppe $\mathfrak{A}_1$ reduziert. Das folgt unmittelbar aus der Gruppeneigenschaft von $\mathfrak{A}_2$ und den Eigenschaften 2. und 3. der reduziblen Gruppen. Ebenso erhalten wir, wenn wir zu den Funktionen von $\mathfrak{M}$ das System aller der sämtlichen Größen von $\mathfrak{A}_1$ darstellenden Funktionen hinzunehmen, einen Modul $\mathfrak{L}$ im Körper P , dessen Gruppe der Restklassen die Gruppe $\mathfrak{A}_2$ ist. Der Modul $\mathfrak{M}$ ist daher ein gemeinsames Vielfaches von $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{L}$, und zwar das kleinste gemeinsame Vielfache, weil jede durch $\mathfrak{N}$ und durch $\mathfrak{L}$ teilbare Funktion auch durch $\mathfrak{M}$ teilbar ist, wie sich aus (5) ergibt.

Um nun zu zeigen, daß $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{L}$ teilerfremd sind, betrachten wir die Haupteinheit von $\mathfrak{A}$. Diese ist die Summe der beiden Haupteinheiten von $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$. Daher ist die Funktion 1 in der Form

$$(19) \quad 1 \equiv N' + L \bmod \mathfrak{M}$$

stellbar, wobei

$$N' \equiv 0 \pmod{\mathfrak{N}} \quad \text{und} \quad \equiv 1 \pmod{\mathfrak{L}}$$

$$L \equiv 0 \pmod{\mathfrak{L}} \quad \text{und} \quad \equiv 1 \pmod{\mathfrak{N}}$$

Aus (19) folgt aber durch geeignete Hinzufügung einer durch $\mathfrak{M}$, so durch $\mathfrak{N}$ teilbaren Funktion zu N' die Existenz zweier Funktionen und L , so daß

$$N + L = 1,$$

$$N \equiv 0 \pmod{\mathfrak{N}},$$

$$L \equiv 0 \pmod{\mathfrak{L}}$$

Daher ist

$$\mathfrak{M} = [\mathfrak{N}, \mathfrak{L}]$$

die kleinste gemeinsame Vielfache der beiden teilerfremden Moduln $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{L}$.

Satz III gestattet es, von der Reduzibilität der Gruppen zu dem Begriff der *Reduzibilität der Klassen von Moduln* überzugehen. In der Tat besagt der Satz u. a., daß die zu einer Klasse gehörenden Moduln entweder sämtlich je als kleinstes gemeinsames Vielfache zweier teilerfremden Moduln im Körper P darstellbar sind, oder daß dies für keinen von ihnen gilt. Tritt der erstere Fall ein, so bestimmen die beiden teilerfremden Moduln, als deren kleinstes gemeinsames Vielfache ein bestimmter Modul der Klasse darstellbar ist, je eine Klasse von Moduln, die zu einer der beiden Gruppen gehört, als deren Summe die ursprüngliche Gruppe erscheint. Diese beiden Klassen sind daher unabhängig von einem speziellen Modul, von dem man ausging, und hängen nur von der gegebenen Klasse ab; diese selbst erscheint also in zwei Klassen reduzibel. Geht man umgekehrt von zwei beliebigen teilerfremden Moduln aus und betrachtet die dazu gehörenden Klassen, so definiert das kleinste gemeinsame Vielfache der beiden Moduln eine neue Klasse, die wiederum unabhängig ist von den beiden speziellen Moduln, nur von den beiden Klassen abhängt und daher als Summe der beiden gegebenen Klassen bezeichnet werden kann. Geht man nämlich von zwei beliebigen andern zueinander teilerfremden Moduln der beiden Klassen aus, so erhält man wieder einen Modul, der Summe der beiden Klassen angehörenden Modul. Eine Klasse, die als Summe zweier Klassen darstellbar ist, heißt irreduzibel in dem betreffenden Körper. Zu jeder irreduziblen Klasse gehört eine irreduzible Gruppe, und wenn zu einer irreduziblen Gruppe überhaupt eine Klasse gehört, so ist sie irreduzibel. Da die Bestandteile jeder reduziblen Gruppe, der eine Klasse gehört, wiederum diese Eigenschaft haben, so kann Satz I und Satz II auch für die Klassen ausgesprochen werden.

Es ist aber ferner klar, daß jede Gruppe der Restklassen eines Moduls $\mathfrak{M}$ nur endlich viele irreduzible Bestandteile enthalten kann. Dies folgt unmittelbar aus Satz III, da zwei teilerfremde Moduln keine gemeinsamen Nullstellen besitzen, die Nullstellen von $\mathfrak{M}$ aber nur aus endlich vielen getrennten algebraischen Gebilden bestehen können. Somit ergibt sich

Satz IV. *Jede Klasse von Moduln ist eindeutig in irreduzible Klassen reduzibel.*

Göttingen, den 10. Juni 1918.

(Eingegangen am 12. Juni 1918.)

Zum Verhalten der konformen Abbildung am Rande*).

Von

Wilhelm Groß in Wien †.

Im folgenden will ich einige ergänzende Bemerkungen meinen vor kurzem erschienenen funktionentheoretischen Arbeiten^{1,2)} anfügen. Zuerst füge ich noch einige Sätze über den inneren Häufungsbereich, den ich²⁾ definiert habe, der aber schon in vielen funktionentheoretischen Untersuchungen vorkommt³⁾, vor allem in den Arbeiten von Study⁴⁾ und insbesondere von Lindelöf^{5,6)}. Ich mache hierbei teilweise von den Resultaten und Methoden der letzten, mir in der Zwischenzeit bekannt gewordenen Arbeit⁶⁾ Gebrauch. Ich werde hierdurch in Stand gesetzt, einige wohl ziemlich weit reichende Sätze, die sich auf die Begriffe: innerer Häufungsbereich, Hauptpunkt und deren Beziehungen erstrecken, zu beweisen; ich erweise diesbezüglich insbesondere auf die Sätze von 5., 10., 11.

Zweitens untersuche ich hier das Verhalten von $|w - A|$ bei der Annäherung von w an den Randpunkt A , sowie ich in²⁾ das Verhalten von $\text{mpl}(w - A)$ untersucht habe.

*) Kurz nach Erledigung der Korrektur dieser Arbeit ist der Verfasser, Dr. Wilhelm Groß, a. o. Professor an der Wiener Universität, am 22. Oktober im Alter von 36 Jahren einer schweren Grippenerkrankung erlegen. Die mathematische Welt verlor in ihm einen vielversprechenden jungen Forscher.

Die Schriftleitung.

¹⁾ Wilhelm Groß, Über die Singularitäten analytischer Funktionen, Monatsh. Math. u. Phys. XXIX (1918), S. 3—47.

²⁾ Wilhelm Groß, Untersuchungen über die Singularitäten analytischer Funktionen, Math. Zeitschr. II (1918), S. 242—294.

³⁾ Zum Beispiel bei den Untersuchungen über den Abelschen Satz usw.

⁴⁾ E. Study, Vorlesungen über ausgewählte Gegenstände der Geometrie, 2. Heft, Konforme Abbildung einfach zusammenhängender Bereiche, herausgegeben unter Mitwirkung von W. Blaschke, B. G. Teubner, Leipzig 1913.

⁵⁾ E. Lindelöf, Mémoire sur certaines inégalités dans la théorie des fonctions monogènes, Acta soc. sc. fenn. Bd. XXXV, Nr. 7, 1908.

⁶⁾ E. Lindelöf, Sur un principe général de l'analyse et ses applications à la théorie de la représentation conforme, Acta soc. sc. fenn. Bd. XLVI, Nr. 4, 1915.

Schließlich gebe ich ein Beispiel einer im Einheitskreis meromorphen Funktion, deren absoluter Betrag auf einer Folge von Kreisen k_n , die gegen den Einheitskreis konvergieren, mit $\frac{1}{n}$ gegen Null geht, während die Funktion nicht identisch verschwindet. Hieraus ergibt sich, daß die Funktion in dem bei der Randzuordnung viel verwendeten Schwarzschen Satze, der von Koebe⁷⁾ und mir¹⁾ erweitert wurde, notwendig gewissen Einschränkungen — z. B. sie läßt drei Werte aus — unterworfen sein muß.

I. Der innere Häufungsbereich.

1. E. Lindelöf hat auf die einfachste Weise⁸⁾ in ⁶⁾ folgenden Satz bewiesen:

$f(z)$ sei eine innerhalb des Bereiches T

$$(1) \quad \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2, \quad 0 \leq r \leq R$$

beschränkte und reguläre Funktion von $z = a + re^{i\varphi}$. Sie möge auf dem in T gegen a strebenden Jordanweg L gegen a konvergieren. L kann mit den Randstrahlen von T Punkte gemein haben, wenn $f(z)$ in diesen Punkten stetig ist.

Dann strebt $f(z)$, wie klein auch ε sei, in dem Winkel

$$(2) \quad \varphi_1 + \varepsilon \leq \varphi \leq \varphi_2 - \varepsilon$$

für $r \rightarrow 0$ gleichmäßig gegen a .

Wird L von einem Randstrahl etwa von $\varphi = \varphi_1$ gebildet, so geht $f(z)$ für $r \rightarrow 0$ in dem Winkel $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2 - \varepsilon$ gleichmäßig gegen a .

2: Ist nun $f(z)$ eine im Einheitskreise meromorphe Funktion, so habe ich in ²⁾ als inneren Häufungsbereich von $f(z)$ im Randpunkte a die Vereinigungsmenge der Häufungsbereiche all jener in a endenden Wege definiert, die den Einheitskreis in weiterem Sinne nicht berühren, d. h. deren jeder schließlich in einem von a ausgehenden Winkelraum verläuft, dessen Schenkel bei a in den Kreis eintreten. Mit Hilfe dieses Begriffes können wir aus obigem Satze folgende Sätze ableiten:

⁷⁾ P. Koebe, Ränderzuordnung bei konformer Abbildung, Gött. Nachr. 1913, S. 286.

⁸⁾ Der dem Beweise zugrunde liegende Kern wurde außer von Lindelöf selbst [Sur la représentation conforme C. R. Bd. 158 (1914), S. 245—257] bereits von anderen Mathematikern benutzt, so von Painlevé, Sur les lignes singulières des fonctions analytiques, Annales de Toulouse Bd. II (1888), S. B1—B130; Zoratti, Leçons sur le prolongement analytique, Gauthier Villars 1911; Koebe, Abhandlungen zur Theorie der konformen Abbildung I., Journ. f. Math. Bd. 145 (1914), S. 177—223; Wilhelm Groß, Zur Theorie der Differentialgleichungen mit festen kritischen Punkten, Math. Ann. LXXVIII (1918), S. 332—342.

Ist die Funktion $f(z)$ im Einheitskreis meromorph und läßt sie in der Umgebung der Randstelle a ein Kontinuum von Werten aus, so besteht der innere Häufungsbereich in a aus dem Punkte α , falls $f(z)$ auf irgendeinem Jordanwege, der im Einheitskreise gegen a strebt, gegen α konvergiert.

Wir brauchen hierzu nur durch eine passende Quadratwurzeloperation einer Funktion φ überzugehen, die in der Umgebung von a im Einheitskreis analytisch und beschränkt ist.

3. Ist $f(z)$ in der Umgebung der Stelle a ausnahmsverzweigt⁹⁾, so befürwortet die Verwendung der dieser Verzweigung zugehörigen Transzendenten den Satz:

Ist $f(z)$ im Einheitskreis meromorph und in der Umgebung der Randstelle a ausnahmsverzweigt, so besteht der innere Häufungsbereich in a aus dem Punkte α , wenn $f(z)$ auf irgendeinem Jordanwege, der im Einheitskreise gegen a strebt, gegen α konvergiert, vorausgesetzt, daß α nicht etwa eine Windungsstelle unendlich hoher Ordnung der Ausnahmsverzweigung ist.

4. Die Arbeit⁵⁾ von Lindelöf liefert hierzu folgende Ergänzung, die dort allerdings nur für den Fall ausgesprochen ist, daß $f(z)$ drei Werte annimmt. Sie läßt sich aber auch in der hier gegebenen allgemeineren Form fast mit den gleichen Worten beweisen:

Ist $f(z)$ im Einheitskreis meromorph und in der Umgebung der Randstelle a ausnahmsverzweigt, so besteht der innere Häufungsbereich in a aus dem Punkte α , wenn α eine Windungsstelle unendlich hoher Ausnahmsverzweigung ist und wenn es dabei einen den Einheitskreis in weiterem Sinne nicht berührenden Jordanweg des Kreises gibt, der in a mündet und auf dem $f(z)$ gegen α konvergiert.

5. Wir werden nunmehr nachweisen, daß in diesem Satze die Bemerkung, daß der in a endende Jordaneinschnitt des Kreises den Einheitskreis in weiterem Sinne nicht berühren darf, überflüssig ist und daher der Satz von 3. folgende Gestalt annimmt:

Ist $f(z)$ im Einheitskreis meromorph und in der Umgebung der Randstelle a ausnahmsverzweigt, so besteht der innere Häufungsbereich in a aus dem Punkte α , wenn $f(z)$ auf irgendeinem Jordanwege, der im Einheitskreise gegen a strebt, gegen α konvergiert.

6. Wir weisen zuerst folgenden Hilfssatz nach:

Ist U ein im Einheitskreise positives Potential, das auf einem in a mündenden Jordaneinschnitt W des Kreises gegen ∞ geht, so geht U

⁹⁾ Vgl. ¹⁾ S. 33 und 42.

auf jedem Jordanweg des Kreises gegen ∞ , der in a mündet und der Kreis in weiterem Sinne nicht berührt.

Um allen Schwierigkeiten zu entgehen, ersetzen wir den Kreis durch eine Jordankurve, die ihn in a berührt, sonst ganz im Innern des Kreises gelegen ist und W mit Ausnahme des Punktes a im Innern enthält. W bilden das Innere dieser Jordankurve $\mathfrak{R}$ auf den Einheitskreis ab. U geht hierbei in ein positives Potential U^* des neuen Einheitskreises K^* ab, das am Rande mit Ausnahme des Punktes a^* überall stetig ist. W geht in einen Jordaneinschnitt W^* von K^* über, der in dem dem Punkte a entsprechenden Punkte a^* endet. Auf W^* geht U^* gegen ∞ .

Sodann gestalten wir den Jordaneinschnitt W^* zu einem Jordankurschnitt $\bar{W}^*$ von K^* um, der auch anderseits gegen einen Randpunkt von K^* strebt. Dadurch zerfällt K^* in zwei Teile K_1^* , bzw. K_2^* . Im Punkte a^* bestimmen wir die gegen ihn aus dem Innern von K^* zielenden Strahlen durch den Winkel φ ($0 < \varphi < \pi$), den sie mit der positiv gerichteten Tangente bilden. Sei nun K_1^* der Teil, der an den Randteil $\varphi = 0$ von K^* im Punkte a anschließt. Ich bilde dann K_1^* konform auf den Einheitskreis K^{**} ab. Im Punkte a^{**} , der a^* entspricht, zähle ich die Winkel der gegen a^{**} aus dem Innern von K^{**} zielenden Strahlen wie oben.

U^{**} , das Bildpotential von U^* , ist im Innern regulär und am Rande von K^{**} mit Ausnahme des Punktes a^{**} stetig und ist, wie man leicht zeigt, als positives Potential gegeben durch das Poissonsche Integral

$$(3) \quad U_{(r, \varphi)}^{**} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U_{(1, \psi)}^{**} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r \cos(\varphi-\psi)} d\psi$$

und da $U_{(1, \psi)}^{**}$ auf dem Randteile $\varphi = \pi$ beim Herangehen an a^{**} über alle Grenzen wächst, so zeigen die bekannten Abschätzungsformeln für das Poissonsche Integral, daß $U_{(r, \varphi)}^{**}$ in dem dem Kreise K^{**} angehörigen Winkelraum

$$(4) \quad \delta \leq \varphi \leq \pi$$

gleichmäßig gegen Unendlich geht, wie klein auch δ gewählt sei.

Nun folgt aus den von mir in *) III. angestellten Betrachtungen, daß die Teile von K_1^* , für die

$$2\delta \leq \varphi \leq \pi, \quad |z^* - a^*| < r^*,$$

in dem Teile des Winkelraumes (4) ihr Bild haben, für den $|z^{**} - a^{**}| < r^{**}$, wobei r^{**} mit r^* gegen Null geht, sofern r^* nur genügend klein gewählt ist. Berücksichtigen wir das K_2^* betreffende analoge Ergebnis, so sehen wir, daß U^* in dem Winkelraum

$$2\delta \leq \varphi \leq \pi - 2\delta$$

der Annäherung an a^* gleichmäßig gegen Unendlich geht, wobei δ beliebig klein gewählt werden kann. Berücksichtigen wir die Winkelproportionalität der Abbildung von $\mathfrak{R}$ auf K^* , so folgt daraus unser Hilfssatz.

7. Die Funktion $f(z)$ sei nun im Einheitskreis meromorph und lasse ν in der Umgebung von a drei Werte aus, gegen deren einen $f(z)$ auf ν in a mündenden Jordaneinschnitt W konvergiert. — Die übrigen Betrachte kommenden Fälle der Ausnahmungsverzweigung erledigen sich analog gleichartig. — Es schadet der Allgemeinheit der Betrachtung nichts, wenn wir annehmen, daß die drei Ausnahmewerte 0, 1 und ∞ sind und daß $f(z)$ auf W gegen ∞ geht.

Es sei nun $\nu(\zeta)$ die Modultranszendente, die die universelle Überlagerungsfläche über der in den Punkten 0, 1, ∞ punktierten ζ -Ebene auf die obere Halbebene der w -Ebene abbildet, und zwar möge die Abbildung so normiert sein, daß dem Punkte ∞ der w -Halbebene ein Punkt ∞ der ζ -Ebene entspricht. Es sei dann der im Einheitskreis der z -Ebene reguläre und eindeutige Zweig $\nu(f(z))$ so bestimmt, daß $\nu(f(z))$ auf W gegen ∞ geht. Der Imaginärteil der Funktion $\nu(f(z))$ ist ein im Einheitskreis reguläres positives Potential, das auf W gegen Unendlich geht, wenn $f(z)$ gegen Unendlich geht. Daher geht $\Im(\nu(f(z)))$ auf jedem in a mündenden Jordanquerschnitt des Einheitskreises, der diesen in weiterem Sinne nicht berührt, gegen Unendlich. Daraus folgt aber einmal, daß auf dem solchen Wege $\nu(f(z))$ gegen Unendlich geht, weiter aber auch, daß $\nu(f(z))$ selbst auf diesen Wegen gegen Unendlich geht, da $\Re(\nu(f(z)))$ und $\Im(\nu(f(z)))$ gleichzeitig miteinander gegen Unendlich gehen. Damit haben wir den Satz von 4. ohne den einschränkenden Zusatz für den Weg W nachgewiesen und können daher den einfachen allgemeinen Satz von 5. aussprechen.

8. Ich will aber gleich betonen, daß in diesen Fällen der Punkt a , den inneren Häufungsbereich des Punktes a bildet, keineswegs Hauptpunkt zu sein braucht, d. h. daß es sehr wohl in a mündende Jordaneinschnitte geben kann, auf denen $f(z)$ a nicht einmal approximiert. Ein einfaches Beispiel hierfür ist

$$f(z) = e^{\frac{z+1}{z-1}}.$$

für jedem gegen den Punkt $z=1$ strebenden Weg des Einheitskreises, der den Einheitskreis in weiterem Sinne nicht berührt, geht $f(z)$ gegen ∞ ; diese stellt daher den inneren Häufungsbereich dar. Auf dem Kreise

$$\Re\left(\frac{z+1}{z-1}\right) = \alpha < 0,$$

der den Einheitskreis im Punkte 1 berührt, nimmt $f(z)$ aber nur Werte an, deren absoluter Betrag e^a ist.

Entsprechend bei dem wie oben normierten $\nu(z)$. Ist $\mu(w)$ die zu ν gehörige Umkehrungsfunktion, so geht $\mu(w)$ auf jedem Wege gegen Unendlich, für den $\Im(w)$ gegen Unendlich geht. Daher ist ∞ der innerer Häufungsbereich der Funktion $\mu(w)$ im Punkte ∞ . Gehe ich aber auf dem Wege $\Im(w) = \beta > 0$ gegen den Punkt ∞ , so besitzt dieser Weg als Häufungsbereich eine Kurve, die ganz im Endlichen gelegen ist und die die Punkte Null und Eins im Innern enthält.

9. Weitere Aussagen können wir jedoch machen, wenn die Funktion in der Umgebung des Punktes a ein Kontinuum von Werten ausläßt und der Wert α , gegen den die Funktion $f(z)$ auf dem in a endenden Jordaneinschnitt konvergiert, diesem Kontinuum angehört. Wir können nämlich sagen:

Ist die Funktion $f(z)$ im Einheitskreis meromorph und läßt sie in der Umgebung der Randstelle a ein Kontinuum von Werten aus, so ist der diesem Kontinuum angehörige Wert α ein Hauptpunkt für $f(z)$ in a , wenn $f(z)$ auf irgendeinem in a mündenden Jordaneinschnitt gegen α konvergiert.

Wir betrachten auf der Riemannschen Fläche über der w -Ebene die zusammenhängenden Punktmengen $|w - \alpha| = \varrho$ für genügend kleine ϱ , die mit dem dem obigen Jordaneinschnitt W entsprechenden Wege $\mathfrak{W}$ Punkte gemein haben. Wir betrachten hierbei nur jenen Teil der Riemannschen Fläche, der einer Umgebung $|z - a| \leq R$ entspricht, in der $f(z)$ das in dem Satze angeführte Kontinuum von Werten ausläßt. Ist daher ϱ genügend klein, so hat jede der eingangs erwähnten Punktmengen $|w - \alpha| = \varrho$ eine Länge höchstens gleich $2\pi\varrho$ und überdeckt die w -Ebene nur einfach.

Ich nehme nun auf W einen Punkt P an, für den $|z - a| = R$ und $|f(z) - \alpha| = P \neq 0$. Nehme ich nun die Gesamtheit der Kreisbögen her, für die $|w - \alpha| = \varrho < P$ ist und die mit $\mathfrak{W}$ Punkte gemein haben. Durch sie wird der Punkt α , bzw. der an a stoßende Teil von $\mathfrak{W}$ von dem W entsprechenden Punkte Q getrennt. Jedem dieser Kreisbögen entspricht ein Querschnitt des Kreisw zweiecks $|z - a| = R$, der beiderseits gegen bestimmte Punkte konvergiert¹⁰⁾. Durch die Gesamtheit dieser Querschnitte wird der Punkt a vom Punkte P getrennt. Daher gibt es zumindest einen Querschnitt darunter, der a von P trennt, und wir wählen jetzt den ersten dieser Querschnitte, wenn wir von a auf dem Wege W ausgehen. Bezeichnen wir die durch diese Auswahl für alle $\varrho < \varrho_1$ erhaltene Punktmenge auf der Riemannschen Fläche mit $M(\varrho_1)$ und die auf der

¹⁰⁾ Vgl. ¹⁾ S. 36.

emannschen Fläche eindeutige Umkehrungsfunktion von $f(z)$ mit $\varphi(w)$, können wir wieder die Ungleichung verwenden:

$$\left(\int \int_{M(\varrho_1)} |\varphi'(w)| \varrho d\varrho d\varphi \right)^2 \leq \int \int_{M(\varrho_1)} \varrho d\varrho d\varphi \int \int_{M(\varrho_1)} |\varphi'(w)|^2 \varrho d\varrho d\varphi.$$

haben einmal

$$\int \int_{M(\varrho_1)} \varrho d\varrho d\varphi \leq \varrho_1^2 \pi.$$

anderseits ist

$$\lim_{\varrho_1 \rightarrow 0} \int \int_{M(\varrho_1)} |\varphi'(w)|^2 \varrho d\varrho d\varphi = 0,$$

daraus folgt, daß

$$\lim \int |\varphi'(w)| \varrho d\varphi = 0.$$

gibt also eine Folge von Querschnitten, die a und P trennen, deren Länge gegen Null geht und auf denen $|f(z) - \alpha|$ mit $\frac{1}{n}$ gegen Null geht. Jeder Weg, der gegen a strebt, diese Querschnitte passieren muß, ist Hauptpunkt.

10. Wir können aber noch einen weitergehenden Satz als einfache Verallgemeinerung der Verallgemeinerungen des Picardschen Theorems nachweisen:

Ist die Funktion $f(z)$ im Einheitskreis meromorph, konvergiert sie dem gegen den Randpunkt a strebenden Jordaneinschnitt W des Kreises gegen α und ist α Häufungspunkt einer Menge von Werten, die in einer bestimmten Umgebung von a nur endlich oft angenommen werden, so ist α Hauptpunkt von $f(z)$ in a .

Es sei bemerkt, daß α selbst in der Umgebung von a unendlich oft angenommen werden darf. — Nehmen wir nun an, es gebe einen gegen a strebenden Weg $\bar{W}$, dessen Häufungsbereich α nicht enthalte. Es gibt aber ein Komplementärgebiet γ des Häufungsbereiches von $\bar{W}$, das α nicht enthält, und daher müßte $f(z)$ in jeder Umgebung von a — und zwar sowohl zwischen W und $\bar{W}$ — jeden Wert von γ mit Ausnahme von höchstens zwei unendlich oft annehmen im Widerspruch damit, daß α Häufungspunkt einer Menge von Werten ist, die in einer gewissen Umgebung von a nur endlich oft angenommen werden.

Eine unmittelbare Folge hiervon ist der Satz:

Ist die Funktion $f(z)$ im Einheitskreis meromorph, ist ihr Häufungsbereich im Randpunkte a nirgends dicht und konvergiert sie auf einem Jordaneinschnitt des Kreises, der in a mündet, gegen den Wert α , so ist α Hauptpunkt.

Weiter:

Ist die Funktion $f(z)$ im Einheitskreis meromorph und konvergiert

sie auf einem in a mündenden Jordaneinschnitt des Kreises gegen einen Randpunkt α des Häufungsbereiches von $f(z)$ in a , so ist α Hauptpunkt.

11. Nunmehr wollen wir aber mit Benutzung der entsprechend abgeänderten Lindelöfschen Methode von *) S. 30 ff. folgenden ziemlich weitgehenden Satz nachweisen ¹¹⁾:

Ist die Funktion $f(z)$ im Einheitskreis meromorph und besitzt sie auf dem in a mündenden Jordaneinschnitt W , der den Kreis in weiterem Sinne nicht berührt, einen Häufungswert α , der Häufungspunkt einer Menge M von Werten ist, die in einer bestimmten Umgebung von a nur endlich oft angenommen werden, so ist α Hauptpunkt von $f(z)$ in a .

Der Fall, daß $f(z)$ auf irgendeinem in a mündenden Jordaneinschnitt gegen α konvergiert, ist durch die vorhergehenden Sätze schon erledigt. Wir nehmen daher an, daß es keinen derartigen Weg gibt. Ohne Schaden der Allgemeinheit können wir annehmen, daß α einen endlichen Wert, etwa den Wert Null besitzt und daß $f(z)$ in einer bestimmten Umgebung U von $a : |z - a| < R$ regulär ist; denn wir können durch eine lineare Transformation von $w = f(z)$ α nach Null und einen Punkt von M nach Unendlich verlegen. Wir setzen weiter voraus, daß von $f(z)$ in U die beiden Werte A und B nicht angenommen werden und daß W ganz in U liegt.

Es sei nun λ der kleinere der Werte $|A|$ und $|B|$. Wir bezeichnen die $f(z)$ in U entsprechende Riemannsche Fläche mit $\Re$, das Bild von W auf $\Re$ mit $\mathfrak{B}$. Es sei P ein Punkt von W , für dessen Bild Q auf $\mathfrak{B}$ $|Q| < \lambda$ gilt. Ich wähle nun, indem ich auf $\mathfrak{B}$ so fortschreite, daß der Bildpunkt auf W von P gegen a wandert, eine unendliche Folge von Punkten G_i :

$$(6) \quad |Q| > |G_i| > |G_{i+1}|, \quad |G_i| \rightarrow 0,$$

deren Bildpunkte gegen a konvergieren. Andererseits sei $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ eine gegen Null konvergierende Folge von Werten

$$(7) \quad |Q| > |S_n| > |S_{n+1}| \rightarrow 0,$$

die in der Umgebung U von a nur endlich oft angenommen werden.

¹¹⁾ Vor Kenntnisnahme der Lindelöfschen Arbeit *) hatte ich mit den Methoden von *) II. vorliegenden Satz unter den beiden engeren Annahmen bewiesen:

1. daß α Randpunkt eines der durch den Häufungsbereich von $f(z)$ in a bestimmten Komplementärgebiete ist,
2. daß α einem Kontinuum von Werten angehöre, die in der Umgebung von a höchstens N -mal angenommen werden.

Aus 1 hatte ich bereits die Sätze von 20. abgeleitet.

12. Ich betrachte jene zusammenhängenden Teile von $\Re$, für die $< |S_n|$, in denen Punkte G_i liegen. Ist n genügend groß, so muß es unendlich viele geben. Gäbe es nämlich eine Folge von n :

$$n_1, n_2, \dots, n_i, \dots,$$

daß für jede dieser Zahlen nur endlich viele zusammenhängende Teile $< |S_{n_i}|$ bestünden, in denen Punkte G lägen, so gäbe es einmal einen entsprechenden Teil t_{n_1} , in dem unendlich viele Punkte von (6) lägen; den endlich vielen Teilen, die n_2 entsprechen, sind einige Teile von t_{n_1} und in einem von ihnen t_{n_2} müßten wieder unendlich viel Punkte unserer Folge liegen. Fahren wir so fort, so erhalten wir eine Folge einer enthaltender Riemannscher Bereiche; $t_{n_1}, t_{n_2}, \dots$, deren jeder unendlich viel Punkte unserer Folge enthält.

Wähle ich nun in jedem dieser Bereiche je einen Punkt von (6):

$$G_{i_1}, G_{i_2}, \dots, G_{i_k}, \dots,$$

daß alle diese Punkte voneinander verschieden sind, so kann ich G_{i_1}, G_{i_2} in t_{n_1} durch einen Jordanweg verbinden, G_{i_2} mit G_{i_3} in t_{n_2} durch einen Jordanweg, der den G_{i_1} und G_{i_2} verbindenden Weg nicht trifft. Indem ich so fortfahre, erhalte ich auf $\Re$ einen Jordanweg, der ein Einschnitt von $\Re$ ist, denn er geht durch die Punkte $G_{i_1}, \dots, G_{i_k}$, deren Bilder gegen a konvergieren. Da die Projektion dieses Einschnittes gegen den Punkt 0 strebt, so strebt das Bild dieses Einschnittes nach ¹⁾ S. 36 gegen einen Randpunkt von U , und zwar müßte dieser Randpunkt a sein, da das Bild des Einschnittes durch die gegen a konvergierenden Bilder der Punkte $G_{i_1}, \dots$ geht im Widerspruch damit, daß es keinen in a mündenden Jordaneinschnitt gibt, auf dem $f(z)$ gegen Null konvergiert.

Wir sehen gleichzeitig, daß, wenn wir ein festes genügend großes n nehmen, eine Folge aus den G derart herausgegriffen werden kann:

$$Q_1, Q_2, \dots, Q_n, \dots; \quad |Q_n| > |Q_{n+1}|; \quad |Q_n| \rightarrow 0,$$

so daß die Bildpunkte gegen a streben, so daß es einen und nur einen zusammenhängenden Teil T_i von $\Re$: $|w| < |S_n|$ gibt, in dem der Punkt Q_i nur dieser liegt.

13. Es gibt nun einen und nur einen T_i begrenzenden Querschnitt. Rückkehrschnitt q_i von $\Re$, der T_i vom Punkte Q trennt; für ihn gilt $|w| = |S_n|$. Da über dem Punkte S_n nur endlich viel — m — Punkte von $\Re$ liegen, so konvergiert der Querschnitt q_i — von den höchstens m Rückkehrschnitten abgesehen — beiderseits gegen bestimmte Punkte und daher konvergiert auch das Bild κ_i dieses Querschnittes nach ¹⁾ S. 36 gegen bestimmte von a verschiedene Randpunkte von U .

Ich ziehe dann von Q auf $\Re$ einen Halbstrahl gegen das Unendliche, dessen Verlängerung nach der anderen Seite durch Null geht. Diesen Einschnitt von $\Re$ entspricht ein Einschnitt von U , der keinen der Querschnitte κ_i trifft und der nach ¹⁾ S. 36 gegen einen bestimmten Randpunkt $b \neq a$ von U konvergiert. Der Rand von U zerfällt so durch a und b in zwei Teile, die ich entsprechend dem positiven Umlaufssinn als links und rechts von a bezeichne.

Ich bemerke zuerst, daß die Häufungspunkte der Querschnitte κ_i auf dem Rande von U liegen; ist c irgendein innerer Punkt von U und entspricht ihm auf $\Re$ eine $(m-1)$ -fache Windungsstelle, so läßt sich um c eine Umgebung derart abgrenzen, daß sie höchstens von $m \kappa_i$ durchsetzt wird.

Nehmen wir nun an, daß die Endpunkte jedes einzelnen von unendlich vielen der κ_i beiderseits von a liegen, so müßte daher jeder gegen a strebende Jordaneinschnitt von U unendlich viele dieser κ_i durchsetzen und da auf diesen κ_i die Beziehung gilt:

$$(9) \quad |w| = |S_n|,$$

so besäße jeder dieser Wege unter seinen Häufungswerten zumindest einen, für den die Beziehung (9) gilt.

Ist der Nullpunkt kein Hauptpunkt für $f(z)$ in a — und diese Voraussetzung wollen wir vorläufig machen und dann als widerspruchsvoll nachweisen —, so muß es einen Weg geben, der in a mündet und dessen Häufungsbereich vom Nullpunkt einen endlichen Abstand h besitzt. Ist n so groß gewählt, daß

$$|S_n| < h$$

— und dies sei der Fall —, so kann es nur endlich viele κ_i geben, deren Endpunkte beiderseits von a liegen.

14. Ich betrachte im folgenden nur solche κ_i — und alle κ_i von einem bestimmten Index an gehören dazu —, deren Endpunkte für jeden einzelnen auf einer Seite von a liegen. Nehme ich einen bestimmten dieser Querschnitte her, so besitzt er einen von Null verschiedenen Abstand von a . Daher können in dem von κ_i abgegrenzten Teilgebiet von U , das den Punkt P nicht enthält, nur endlich viel Bilder der Punkte Q und daher auch nur endlich viel κ liegen.

Anderseits kann κ_i nur durch endlich viele κ von P getrennt werden, da sonst die κ_i einen Häufungspunkt im Innern von U haben müßten.

Daher läßt sich aus den κ eine unendliche Folge mit wachsenden Indizes herausgreifen — ich bezeichne sie in dieser Folge mit

$$\kappa_1^*, \kappa_2^*, \dots, \kappa_h^*, \dots,$$

so daß kein κ^* dieser Folge durch einen andern Querschnitt der Folge

on P getrennt wird. Durch κ_h^* wird das Bild des Bereiches T_h^* mit dem Bilde P_h^* von Q_h^* von P getrennt.

15. Ich bilde jetzt einmal den Bereich U auf den Einheitskreis der ζ -Ebene ab, so daß den Punkten a und b die Punkte $+1$ und -1 entsprechen. Dem Einschnitt W entspricht hierbei ein Einschnitt $\bar{W}$, der in a Punkte $+1$ mündet, ohne den Einheitskreis zu berühren. $\bar{W}$ liegt daher in der Kreissichel, die von den Kreisen des Büschels durch $+1$ und -1 gebildet wird, die mit der reellen Achse die Winkel $\frac{\pi}{2} + \eta$ und $\frac{\pi}{2} - \eta$ bilden. In diesem Zweieck liegen daher auch die Bilder der Punkte P_h^* .

Sodann bilde ich den Einheitskreis der ζ -Ebene — und damit U — ab.

$$(0) \quad u = \log \frac{\zeta - 1}{\zeta + 1}$$

auf den Parallelstreifen der u -Ebene:

$$(1) \quad \frac{\pi}{2} > \Im(u) > -\frac{\pi}{2}$$

16. Die Funktion $f(z)$ in u geht in die Funktion $\varphi(u)$ in (11) über. Unsere Kreissichel geht dabei in den Parallelstreifen

$$(2) \quad \frac{\pi}{2} - \eta > \Im(u) > -\frac{\pi}{2} + \eta$$

über. Wir bestimmen p als kleinste ganze Zahl, die der Bedingung genügt:

$$(3) \quad \left(\frac{2}{3}\right)^p \pi \leq \eta.$$

16. Es sei $\mathfrak{T}_i$ der von dem Bilde $\bar{\kappa}_i$ von κ_i^* begrenzte endliche Teilbereich des Parallelstreifens. Da $\mathfrak{T}_i$ das Bild $\bar{P}_i$ von P_i^* enthält, so hat $\mathfrak{T}_i$ mit dem Parallelstreifen (12) Punkte gemein. Ist $\varphi(u)$ eine Funktion, die in $\mathfrak{T}_i$ und auf $\bar{\kappa}_i$ in (11) regulär und absolut kleiner als eins ist, während auf $\bar{\kappa}_i$ die Ungleichung besteht

$$(4) \quad |\varphi(u)| < \varepsilon,$$

so zeigen wir einmal mit Lindelöf, daß $\varphi_i(u)$ in den Punkten, die $\mathfrak{T}_i$ mit dem Parallelstreifen (12) gemein hat, der Ungleichung genügt

$$(5) \quad |\varphi(u)| < \varepsilon^{\frac{1}{3^p}}.$$

$\bar{\kappa}_i$ möge seine Endpunkte auf der Geraden $\Im(u) = -\frac{\pi}{2}$ haben. Das Maximum von $\Im(u)$: $m - \frac{\pi}{2}$ auf κ_i liegt zwischen $\frac{\pi}{2}$ und $-\frac{\pi}{2} + \eta$. Betrachte nun die Punkte von $\mathfrak{T}_i$ für die $\Im(u) = \frac{2}{3}m - \frac{\pi}{2}$. Sei u_0 einer dieser Punkte. Die Funktion

$$(16) \quad \Phi(u) = \varphi(u) \cdot \varphi(u_0 + e^{\frac{2\pi i}{3}}(u - u_0)) \cdot \varphi(u_0 + e^{\frac{4\pi i}{3}}(u - u_0))$$

ist als reguläre Funktion in einem u_0 enthaltenden Bereich $\mathfrak{B}$ definiert, der das u_0 enthaltende Durchschnittsgebiet ist, das der Bereich $\mathfrak{T}_i$ mit den beiden Bereichen gemein hat, die man erhält, wenn man $\mathfrak{T}_i$ um u_0 um 120° bzw. 240° dreht. Daß die Berandung von $\mathfrak{B}$ nur aus Teilen von $\mathfrak{T}_i$ und den aus $\bar{x}_i$ durch die Drehung entstehenden Linien besteht, sieht man am einfachsten, wenn man bedenkt, daß $\mathfrak{B}$ ganz in dem gleichseitigen Dreieck enthalten ist, dessen Mittelpunkt u_0 ist und dessen eine Seite in der Geraden $\Im(u) = m - \frac{\pi}{2}$ liegt.

In jedem Randpunkt von $\mathfrak{B}$ mit Ausnahme von höchstens dreien — den möglicherweise auftretenden Eckpunkten des erwähnten gleichseitigen Dreiecks — sind die Faktoren von $\Phi(u)$ regulär. Einer von ihnen ist absolut kleiner als ε , während die beiden anderen Faktoren absolut kleiner als ein $\varepsilon^{\frac{1}{3}}$ sind. Da in $\mathfrak{B}$ obendrein $|\Phi(u)| < 1$, so folgt

$$|\varphi(u_0)| = |\sqrt[3]{\Phi(u_0)}| < \varepsilon^{\frac{1}{3}}.$$

Da $\varphi(u)$ für die Punkte von $\mathfrak{T}_i$, für die $\Im(u) = \frac{2}{3}m - \frac{\pi}{2}$, absolut kleiner als $\varepsilon^{\frac{1}{3}}$ ist, so ist sie es für alle Punkte von $\mathfrak{T}_i$, für die

$$\Im(u) \geq \frac{2}{3}m - \frac{\pi}{2},$$

bzw. für alle jene Teilbereiche von $\mathfrak{T}_i$, deren Begrenzung nur von Punkten von $\bar{x}_i$ und der Geraden $\Im(u) = \frac{2}{3}m - \frac{\pi}{2}$ gebildet wird.

Wenden wir diese Schlußweise auf den Teilbereich von $\mathfrak{T}_i$ an, für den $\Im(u) < \frac{2}{3}m - \frac{\pi}{2}$ ist und der an die Gerade $\Im(u) = -\frac{\pi}{2}$ stößt, bedenken wir hierbei, daß in den Randpunkten dieses Bereiches, soweit sie nicht auf den Geraden $\Im(u) = -\frac{\pi}{2}$ liegen, $\varphi(u)$ regulär und absolut kleiner als $\varepsilon^{\frac{1}{3}}$ ist, so erkennen wir, daß in allen Teilbereichen von $\mathfrak{T}_i$, die nur von Punkten von $\bar{x}_i$, bzw. der Geraden $\Im(u) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 m - \frac{\pi}{2}$ begrenzt werden, also sicher für alle Punkte von $\mathfrak{T}_i$, für die $\Im(u) \geq \left(\frac{2}{3}\right)^2 m - \frac{\pi}{2}$

$$|\varphi(u)| < \varepsilon^{\frac{1}{3^2}}.$$

Schließen wir so weiter, so folgt, daß für alle Punkte von $\mathfrak{T}_i$, für die $\Im(u) \geq \left(\frac{2}{3}\right)^p m - \frac{\pi}{2}$

$$|\varphi(u)| < \varepsilon^{\frac{1}{3^p}},$$

so sicher für alle Punkte von $\mathfrak{L}_i$, für die

$$\Im(u) \geq -\frac{\pi}{2} + \eta,$$

so für die, die in dem Streifen (12) liegen.

17. Zu derartigen Funktionen $\varphi_i(u)$ kommen wir aber in folgender Weise. Wir bilden einmal die universelle Überlagerungsfläche der in den Punkten A, B, ∞ punktierten w -Ebene konform auf den Kreis $|v| < \frac{3}{4}$ der v -Ebene ab, so daß dem über Null liegenden Punkte eines bestimmten Blattes der Punkt Null der v -Ebene entspricht. Denke ich mir den Kreis durch $S_n: |w| = |S_n|$ und die Punkte $Q_1^*, \dots, Q_n^*, \dots, S_n \dots S_N, \dots$ auf dieses Blatt übertragen, so entspricht einmal dem Kreise in der v -Ebene eine geschlossene doppelpunktfreie analytische Kurve $\mathfrak{R}$, die den Nullpunkt umschließt, da ja die Verzweigungsstellen der Überlagerungsfläche außerhalb des Kreises liegen. In $\mathfrak{R}$ liegen dann die Punkte

$$(17) \quad K_1, \dots, K_n \rightarrow 0, \quad \Sigma_n, \dots, \Sigma_N \rightarrow 0,$$

die den Punkten Q^* bzw. S entsprechen.

Auf $\mathfrak{R}$ haben wir einmal

$$r_1 < |v| < r_2 < 1,$$

während die Schwankung des Arguments von v bei einmaligem Durchlaufen von $\mathfrak{R} < \Psi$ ist. Ist $\Sigma_N, -|\Sigma_N| < \frac{1}{4}$, — nur nahe genug an dem Nullpunkt gelegen, also für $N \geq N_1$, so hat man bei vorgegebenem $\delta < \frac{r_1}{2}, < \frac{1-r_2}{2}$

$$r_1 - \delta < |v - \Sigma_N| < r_2 + \delta < 1,$$

während die Schwankung des Arguments von $v - \Sigma_N$ bei einmaligem Durchlaufen von $\mathfrak{R} < \Psi + \delta$ ist. Wir können daher unabhängig von N für $N \geq N_1$ eine ganze Zahl g so bestimmen, daß auf $\mathfrak{R}$

$$1 - \varepsilon_1 < |\sqrt[g]{v - \Sigma_N}| < 1,$$

während die Schwankung des Arguments von $\sqrt[g]{v - \Sigma_N}$ bei einmaligem Durchlaufen von $\mathfrak{R} < \frac{1}{2\pi} \varepsilon_1$ ist. Gleichzeitig kann ich nach Festsetzung von g, Σ_N so nahe an Null und j so groß wählen, daß

$$(18) \quad |\sqrt[g]{K_i - \Sigma_N}| < \frac{1}{4}, \quad i \geq j.$$

Ich wähle ich nun gleich $(\frac{1}{4})^{3^p}$. p ist die in (13) bestimmte Zahl. Das obige Ergebnis können wir dann in folgende Worte kleiden: Durchlaufen wir einen Bogen von $\mathfrak{R}$, der $\mathfrak{R}$ höchstens einmal überdeckt, so läßt sich in Punkt V so finden,

$$(19) \quad 1 - (\frac{1}{4})^{3^p} < |V| < 1,$$

daß für einen bestimmten Zweig von $\sqrt[3]{v - \Sigma_N}$ die Ungleichung gilt:

$$(20) \quad |\sqrt[3]{v - \Sigma_N} - V| < \left(\frac{1}{4}\right)^{3^p}.$$

Gleichzeitig sei bemerkt, daß im ganzen Kreise $|v| < \frac{3}{4}$ für jede Bestimmung der Wurzel die Ungleichung gilt:

$$(21) \quad |\sqrt[3]{v - \Sigma_N} - V| < 2.$$

18. Es sei nun

$$v = \nu(w)$$

die in 17. verwendete Abbildungsfunktion.

Ich betrachte jetzt ein $\mathfrak{T}_i$, $i \geq j$, so daß $\psi(u)$ in $\mathfrak{T}_i$ den Wert S_N annimmt und auf dem $\mathfrak{T}_i$ begrenzenden Querschnitt $\bar{\kappa}_i$ den Wert S_n nicht annimmt; da in (11) nur endlich viele Punkte vorhanden sind, in denen $\psi(u)$ die Werte S_N und S_n annimmt, so ist eine derartige Wahl stets möglich.

Betrachte ich jetzt die Funktion

$$(22) \quad \chi(u) = \nu(\psi(u)),$$

die in $\mathfrak{T}_i$ eindeutig als reguläre Funktion festgelegt ist, wenn wir bestimmen, daß

$$\chi(\bar{P}_i) = K_i,$$

so nimmt $\chi(u)$ in $\mathfrak{T}_i$ den S_N entsprechenden Wert Σ_N und auf $\bar{\kappa}_i$ den Wert Σ_n nicht an. Durchläuft u den Querschnitt $\bar{\kappa}_i$, so durchläuft $v = \chi(u)$ einen Bogen der Kurve $\mathfrak{K}$, der die Ebene höchstens einmal überdeckt.

Nun ist ein irgendwie festgelegter Zweig von $\sqrt[3]{\chi(u) - \Sigma_N}$ in $\mathfrak{T}_i$ eindeutig und es läßt sich nach 17. ein Wert V , der der Ungleichung (19) genügt, bestimmen, so daß auf $\bar{\kappa}_i$

$$|\sqrt[3]{\chi(u) - \Sigma_N} - V| < \left(\frac{1}{4}\right)^{3^p}.$$

Wir nehmen jetzt als Funktion $\varphi(u)$ von 16. die Funktion

$$\varphi(u) = \frac{\sqrt[3]{\chi(u) - \Sigma_N} - V}{2}.$$

Infolge (21) ist in $\mathfrak{T}_i$ $|\varphi(u)| < 1$ und daher gilt in den Punkten die $\mathfrak{T}_i$ mit dem Streifen (11) gemein hat, nach 16.

$$(23) \quad |\varphi(u)| < \frac{1}{4}.$$

Unter diesen Punkten ist aber der Punkt K_i enthalten und die Ungleichung (23) würde daher ergeben

$$|V| < \frac{1}{2} + |\sqrt[3]{K_i - \Sigma_N}| < \frac{3}{4}$$

im Widerspruch zu Ungleichung (19).

19. Daher ist die Annahme von 13. Ende unrichtig; also ist der Nullpunkt Hauptpunkt und unser Satz ist hiermit bewiesen. Wir können den Satz auch so aussprechen:

Ist α Häufungspunkt einer Menge von Werten, die von der im Einheitskreis meromorphen Funktion in der Umgebung des Randpunktes a nur endlich oft angenommen werden, und gehört α dem inneren Häufungsbereich von $f(z)$ in a an, so ist α Hauptpunkt von $f(z)$ in a .

20. Wir fassen hier nur zwei Folgerungen in Sätze:

Ist der Häufungsbereich der im Einheitskreis meromorphen Funktion $= f(z)$ für den Randpunkt a in dem Gebiete T der w -Ebene nirgends dicht, so fällt in T der innere Häufungsbereich mit der Menge der Hauptpunkte zusammen.

Insbesondere:

Ist der Häufungsbereich der im Einheitskreis meromorphen Funktion $f(z)$ für den Randpunkt a nirgends dicht, so fällt für a der innere Häufungsbereich mit der Menge der Hauptpunkte zusammen und besteht aus einem Punkte, bzw. einem Kontinuum.

Es sei noch erwähnt, daß alle Sätze von ²⁾ II. über den inneren Häufungsbereich aus dem Satze von 11. unmittelbar gefolgert werden können.

II. Das Verhalten der Abbildung am Rande.

1. Es sei $f(z)$ eine im Einheitskreise meromorphe Funktion. Dem Randpunkte a möge der erreichbare Randpunkt α der $f(z)$ entsprechenden Riemannschen Fläche $\Re$ entsprechen. Ich will einmal annehmen, daß a einer bestimmten — innerhalb des Einheitskreises genommenen — Umgebung von a der Wert α und der Wert ∞ nicht angenommen werde. Dann kann ich in dieser Umgebung $U: |z - a| < R$

$$(24) \quad \text{ampl}(f(z) - \alpha) = \Im \{ \log(f(z) - \alpha) \}$$

undeutig festlegen. Ich will nun annehmen, daß dieses Potential in U beschränkt sei.

Ohne die Allgemeinheit der Untersuchung zu beeinträchtigen, können wir U mit dem Einheitskreis zusammenfallen lassen, denn wir können ja stets U auf den Einheitskreis abbilden. Dann läßt sich aber $\text{ampl}(f(z) - \alpha)$ im Einheitskreis durch die Formel darstellen:

$$(25) \quad \text{ampl}(f(z) - \alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G(\psi) \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(\varphi - \psi)} d\psi,$$

wobei $G(\psi)$ eine beschränkte, meßbare Funktion von ψ ist, die für alle ψ

mit Ausnahme höchstens einer Nullmenge definiert ist. Wir haben die rechtsseitigen und linksseitigen Unbestimmtheitsgrenzen von $G(\psi)$ bezüglich der den erreichbaren Punkten von $\Re$ entsprechenden Randpunkte des Kreises im Punkte $\alpha: (1, \varphi_0)$ in Betracht gezogen und daraus auf das Verhalten von $\text{ampl}(f(z) - \alpha)$ in der Umgebung von α Schlüsse gezogen.

Nunmehr wollen wir aus dem Verhalten von $G(\psi)$ in der Umgebung der Randstelle α auf das Verhalten von $|f(z) - \alpha|$ schließen. Dazu bemerken wir, daß

$$(26) \quad \log |f(z) - \alpha| = \Re \{ \log (f(z) - \alpha) \}.$$

$\log |f(z) - \alpha|$ ist also das konjugierte Potential zu (24) und wird daher im Einheitskreis durch die Formel gegeben:

$$(27) \quad \log |f(z) - \alpha| = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} G(\psi) \frac{r \sin(\varphi - \psi)}{1 + r^2 - 2r \cos(\varphi - \psi)} d\psi + C,$$

wobei C den Wert $\log |f(0) - \alpha|$ besitzt.

2. Es seien nun

$$o^+, u^+; \quad o^-, u^-$$

die rechtsseitigen bzw. linksseitigen Unbestimmtheitsgrenzen von $G(\psi)$ im Punkte α , diese in obigem Sinne genommen; rechts und links bezeichnen wir nach dem positiven Umlaufssinn des Kreises. Es sei dann

$$(28) \quad u^- - o^+ = \beta\pi; \quad u^+ - o^- = \gamma\pi; \quad \gamma \geq \beta.$$

Wir erinnern uns daran, daß einmal

$$(29) \quad \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r \sin(\varphi - \psi)}{1 + r^2 - 2r \cos(\varphi - \psi)} d\psi = 0$$

und daß

$$(30) \quad \log |z - \alpha| = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{r \sin(\varphi - \psi) \operatorname{sgn} \sin(\varphi_0 - \psi)}{1 + r^2 - 2r \cos(\varphi - \psi)} d\psi + \log |z + \alpha|.$$

Wir betrachten sodann die Funktion

$$(31) \quad D(r, \varphi) = \log |f(z) - \alpha| - (\beta - \varepsilon) \log |z - \alpha| \\ = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ G(\psi) - (\beta - \varepsilon) \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} \sin(\varphi_0 - \psi) - \frac{u^- + 0^+}{2} \right\} \frac{r \sin(\varphi - \psi)}{1 + r^2 - 2r \cos(\varphi - \psi)} d\psi + \\ - (\beta - \varepsilon) \log |z + \alpha|.$$

Ich verlege nun durch eine Drehung den Punkt $(1, 0)$ in den Punkt α und erstrecke dementsprechend das Integral von $-\pi$ bis $+\pi$. Ich grenze dann ein Intervall $|\psi| < \delta$ so ab, daß

$$\text{für } \delta > \psi > 0: u^+ - \frac{\varepsilon}{2} < G(\psi) < o^+ + \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\text{für } -\delta < \psi < 0: o^- + \frac{\varepsilon}{2} > G(\psi) > u^- - \frac{\varepsilon}{2}.$$

zeichnen wir nun den im Integral von (31) enthaltenen Klammerausdruck mit $M(\psi)$, so ist außerhalb des Intervalles $|\psi| < \delta$, sobald $|\varphi| < \frac{\delta}{2}$,

$$|M(\psi)| < |G(\psi)| + |\beta - \varepsilon| \frac{\pi}{2} + \left| \frac{u^- + o^+}{2} \right| = L(\psi),$$

$$1 + r^2 - 2r \cos(\varphi - \psi) > \left(1 - \cos \frac{\delta}{2}\right)^2,$$

so ist für den von diesem Teil herrührenden Teil des Integrales von (31):

$$(32) \quad |I_1| < \frac{1}{\pi} \left(1 - \cos \frac{\delta}{2}\right)^{-2+\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} L(\psi) d\psi = C(\delta),$$

wobei $C(\delta)$ nur von δ abhängt.

3. Nun gelten für $M(\psi)$, wenn wir etwa annehmen, daß $\varphi > 0$ ist, folgende Ungleichungen:

$$\text{für } -\delta < \psi < 0: M(\psi) > \frac{\pi-1}{2} \cdot \varepsilon,$$

$$\text{für } \varphi < \psi < \delta: M(\psi) < -\frac{\pi-1}{2} \cdot \varepsilon.$$

Ich bekomme für den Teil des Integrales von (31), für den $|\psi| < \delta$,

$$I_2 < -\frac{\pi-1}{2\pi} \varepsilon \int_{-\delta}^{+\delta} \frac{r \sin(\varphi - \psi) \operatorname{sgn}(-\psi)}{1 + r^2 - 2r \cos(\varphi - \psi)} d\psi \\ - \frac{1}{\pi} \int_0^{\varphi} \left\{ M(\psi) + \frac{\pi-1}{2} \varepsilon \right\} \frac{r \sin(\varphi - \psi)}{1 + r^2 - 2r \cos(\varphi - \psi)} d\psi < I_3 + I_4.$$

Wobei habe ich

$$(33) \quad I_3 = -\frac{\pi-1}{2\pi} \varepsilon \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{r \sin(\varphi - \psi) \operatorname{sgn}(-\psi)}{1 + r^2 - 2r \cos(\varphi - \psi)} d\psi + H_1(\delta) \\ = \frac{\pi-1}{\pi} \varepsilon \log |z - a| + H_3(\delta);$$

$H_1(\delta)$, $H_3(\delta)$ sind hierbei Ausdrücke, die absolut genommen kleiner sind als die nur von δ abhängenden Konstanten $C_1(\delta)$, $C_2(\delta)$, wenn $|\varphi| < \pi$.

Andererseits habe ich für $0 < \psi < \varphi$:

$$u^+ - o^+ - \varepsilon < M(\psi) + \frac{\pi-1}{2} \varepsilon < 0,$$

also jedenfalls

$$\left| M(\psi) + \frac{\pi-1}{2} \varepsilon \right| < M.$$

Daraus folgt

$$(34) \quad |I_4| < \frac{M}{\pi} \int_0^\varphi \frac{r \sin(\varphi - \psi)}{1 + r^2 - 2r \cos(\varphi - \psi)} d\psi = \frac{M}{\pi} \log \frac{\sqrt{1 + r^2 - 2r \cos \varphi}}{1 - r}.$$

Wenn wir an den Punkt $(1, 0)$ in dem Winkelraum herangehen, $|\text{ampl}(z - 1)| < \vartheta$, so bleibt, wenn der Abstand von (r, φ) und $(1, 0)$ genügend klein ist,

$$(35) \quad \frac{\sqrt{1 + r^2 - 2r \cos \varphi}}{1 - r} < \frac{1}{\cos \vartheta} + \eta^{12}.$$

Wir können daher $I_4 = H_3(\delta, \vartheta)$ setzen, wobei $H_3(\delta, \vartheta)$ absolut genommen unter der von δ, ϑ abhängigen Konstanten $C_3(\delta, \vartheta)$ bleibt, sobald r genügend nahe an eins ist.

4. Wir haben daher, wenn (r, φ) genügend nahe an $(1, 0)$ ist,

$$D(r, \varphi) < \frac{\pi - 1}{\varepsilon} \log |z - a| + C_4(\delta, \vartheta),$$

wobei die Konstante $C_4(\delta, \vartheta)$ nur von δ, ϑ abhängt; also

$$(36) \quad \frac{|f(z) - \alpha|}{|z - a|^{\beta - \varepsilon}} < C_5(\delta, \vartheta) |z - a|^{\frac{\pi - 1}{\pi} \varepsilon} \rightarrow 0,$$

d. h. wie klein ich auch ε wähle, so geht der Quotient

$$\frac{|f(z) - \alpha|}{|z - a|^{\beta - \varepsilon}}, \quad \beta = \frac{u - o^+}{\pi}$$

gleichmäßig gegen Null, wenn ich mich dem Punkte a in einem Winkelraum nähere, dessen Schenkel den Einheitskreis nicht berühren.

Ganz entsprechend beweisen wir den partiellen Satz:

Wie klein ich auch ε wähle, so geht der Quotient

$$\frac{|f(z) - \alpha|}{|z - a|^{\gamma + \varepsilon}}, \quad \gamma = \frac{u^+ - o^-}{\pi}$$

gleichmäßig gegen Unendlich, wenn ich mich dem Punkte a in einem Winkelraume nähere, dessen Schenkel den Einheitskreis nicht berühren.

¹²⁾ Am leichtesten sieht man es folgendermaßen ein: Ich betrachte die Punkte $Q = (1, 0)$, $P = (r, \varphi)$, $P_0 = (r, 0)$ und den dem Punkte Q nächsten Punkt P_1 , in dem der Kreis $|z| = r$ die Gerade schneidet, die unter dem Winkel $\pi - \vartheta$ die reelle Achse im Punkte 1 trifft. Wir haben

$$\frac{\sqrt{1 + r^2 - 2r \cos \varphi}}{1 - r} = \frac{\overline{PQ}}{P_0 Q} = \frac{\sin \sphericalangle (PP_0 Q)}{\sin \sphericalangle (QP P_0)} < \frac{\sin \sphericalangle (P_1 P_0 Q)}{\sin \sphericalangle (Q P_1 P_0)}.$$

Der letzte Quotient strebt aber für $r \rightarrow 1$ gegen $\frac{1}{\sin(\frac{\pi}{2} - \vartheta)} = \frac{1}{\cos \vartheta}$.

Es sei betont, daß hierbei β sehr wohl auch negativ sein kann, während γ stets größer oder gleich Null ist.

Von besonderem Interesse ist der Fall, wo der Bereich $\Re$ im Punkte α eine rechte, bzw. linke Halbtangente, ev. in dem in ²⁾ III. erläuterten weiteren Sinne besitzt, so daß $\beta = \gamma$ ist und im Punkte α eine Ecke vom Öffnungswinkel β vorliegt.

Besitzt der einfach zusammenhängende Riemannsche Bereich $\Re$ eine Ecke α vom Öffnungswinkel β und entspricht dieser bei der durch $w = f(z)$ gegebenen Abbildung von $\Re$ auf den Einheitskreis der z -Ebene der Punkt a , so gehen, wie klein ich auch ε wähle, die Quotienten

$$\frac{|f(z) - \alpha|}{|z - a|^{\beta - \varepsilon}} \quad \text{und} \quad \frac{|f(z) - \alpha|}{|z - a|^{\beta + \varepsilon}}$$

gleichmäßig gegen Null, bzw. gegen Unendlich, wenn ich mich dem Punkte a in einem Winkelraume nähere, dessen Schenkel den Einheitskreis nicht berühren.

III. Ein Beispiel zu einem Schwarzschen Satze.

1. Aus dem Spiegelungsprinzip von Schwarz¹²⁾ folgt unmittelbar folgender Satz:

Ist $F(z)$ eine oberhalb eines Stückes $a \dots b$ der Achse des Reellen in einem gewissen anschließenden Flächenstreifen regulär erklärte analytische Funktion von der Eigenschaft, bei der Annäherung an die Achse des Reellen gleichmäßig einem konstanten Wert zuzustreben, so reduziert sich diese Funktion überhaupt auf eine Konstante,

was Koebe⁷⁾ formuliert und sodann erweitert hat. Zu erwähnen ist sein eleganter Beweis in einer späteren Arbeit¹³⁾. Mit nochmaliger Erweiterung habe ich¹⁾ dem Satze folgende Form gegeben:

Ist $F(z)$ eine oberhalb der Achse des Reellen in dem längs des Stückes $[a, b]$ derselben anschließenden Gebiete G erklärte, eindeutige konforme Funktion, die drei Werte ausläßt, gibt es dann eine Folge von Linien λ_n in G , die gegen $[a, b]$ in seiner ganzen Ausdehnung konvergieren, so daß die Funktionswerte auf λ_n sich von einer Konstante k_n unterscheiden, deren absoluter Betrag kleiner als ε_n ist, $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$,

¹²⁾ H. A. Schwarz, Zur Integration der partiellen Differentialgl. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ unter vorgeschriebenen Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen, Berl. Monatsh. 1870, 8. Abh., Bd. II, S. 175–210.

¹³⁾ P. Koebe, Abhandlungen zur Theorie der konformen Abbildung I, Journ. Math. 145 (1915), S. 177–223.

bzw. ihrem absoluten Betrag nach über g_n liegen, wobei g_n mit n gegen Unendlich geht, so kann $F(z)$ nicht von einer Konstanten verschieden sein.

Die Bedingung, daß $F(z)$ in G drei Werte ausläßt, kann man durch die allgemeinere Bedingung ersetzen, daß die der Funktion $w = F(z)$ in G entsprechende Riemannsche Fläche über der w -Ebene ausnahmsverzweigt ist. Ausnahmsverzweigt bezeichne ich eine Riemannsche Fläche dann, wenn es drei, bzw. vier, bzw. fünf Punkte der w -Ebene gibt, so daß alle über einem dieser Punkte i liegenden Stellen der Riemannschen Fläche, von endlich vielen abgesehen, Windungsstellen von einer Ordnung sind, die um eins vermehrt durch m_i teilbar ist, wobei $\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} < 1$, bzw. $\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} + \frac{1}{m_4} < 2$, bzw. $\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} + \frac{1}{m_4} + \frac{1}{m_5} < 3$ ist. Die letzte dieser Ungleichungen legt den m_i , die ja ≥ 2 sind, keine Bedingung auf. Liegen über einem Punkt nur endlich viel Blätter der Riemannschen Fläche, so können wir dem m_i den Wert ∞ erteilen.

2. Es erhebt sich jedoch die Frage, ob es überhaupt notwendig ist, die in G eindeutige meromorphe Funktion Einschränkungen zu unterwerfen. Daß diese Frage zu bejahen ist, zeige ich durch Konstruktion einer im Einheitskreis meromorphen Funktion $f(z)$, für die es eine Reihe konzentrischer, gegen den Einheitskreis konvergierender Kreise $k_1, \dots, k_n, \dots$ gibt, so daß der absolute Betrag von $f(z)$ auf k_n kleiner als $\frac{1}{2^n}$ ist. Da das konstruierte $f(z)$ im Nullpunkt einen Pol besitzt, ist es sicher von einer Konstanten verschieden.

3. Zur Konstruktion benutzen wir folgende Hilfsbetrachtung: Ist $\varphi(z)$ eine auf und außer dem Kreise K regulär-analytische Funktion, die im Unendlichen verschwindet, so wird durch das Integral $\Phi(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{\varphi(\xi) d\xi}{\xi - z}$ im Außengebiet von K $\varphi(z)$, im Innengebiet hingegen Null dargestellt. Ist dann κ ein abgeschlossener Kreisring, der zu K konzentrisch ist und K in seinem Innern enthält, so können wir $\Phi(z)$ derart durch eine Riemannsche Summe

$$(37) \quad \Psi(z) = \sum_1^n \frac{\varphi(\xi_i) \xi_i}{z - \xi_i} \frac{1}{n}$$

ersetzen, so daß $|\Phi(z) - \Psi(z)|$ in den beiden durch κ bestimmten Komplementärgebieten kleiner ist als das beliebig vorgegebene ε , so daß sich also $\Psi(z)$ in dem äußeren Komplementärgebiet von $\varphi(z)$ im inneren Komplementärgebiet von Null um weniger als ε , absolut genommen, unter-

heidet¹⁴⁾. $\Psi(z)$ ist hierbei eine in der ganzen Ebene eindeutige, meromorphe Funktion, die im Unendlichen verschwindet.

4. Wir betrachten einmal die Kreise um den Nullpunkt $k_1, \dots, k_n, \dots$, in denen k_n den Radius $1 - \frac{1}{2n+1}$ besitzt, sodann die Kreise um den Nullpunkt: $k_1^*, \dots, k_n^*, \dots$, von denen k_n^* den Radius $1 - \frac{1}{2n}$ besitzt. Legen wir in einen Kreisring κ_n , der begrenzt wird durch die Kreise mit den Radien $1 - \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2}$ und $1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{8n^2}$. Die Kreise k_n liegen sämtlich außerhalb der abgeschlossenen Kreistreifen κ_n .

Ich gehe sodann von der Funktion $\frac{1}{z}$ aus und konstruiere mir nach 3., indem ich k_1^* als K , κ_1 als κ nehme, eine meromorphe Funktion $\psi_1(z)$, die sich in dem inneren Komplementärgebiet von κ_1 von Null, in dem äußeren Komplementärgebiet von κ_1 von $\frac{1}{z}$ um weniger als $\frac{1}{2^2}$, absolut genommen, unterscheidet. Entsprechend konstruiere ich mir nach 3., indem ich k_i^* als K , κ_i als κ nehme, eine meromorphe Funktion $\psi_i(z)$, die sich in dem inneren Komplementärgebiet von κ_i von Null, in dem äußeren Komplementärgebiet von κ_i von $\frac{1}{z} - \sum_{h=1}^{i-1} \psi_h(z)$ um weniger als $\frac{1}{2^{i+1}}$, absolut genommen, unterscheidet.

Die Funktion

$$G(z) = \frac{1}{z} - \sum_{h=1}^{\infty} \psi_h(z)$$

ist die gewünschte Funktion.

5. $G(z)$ ist im Einheitskreis eindeutig und meromorph, denn ist $\bar{z}$ ein Punkt aus κ_n , so haben wir

$$\left| \frac{1}{\bar{z}} - \sum_{h=1}^{\infty} \psi_h(\bar{z}) + \psi_n(\bar{z}) \right| \leq \left| \frac{1}{\bar{z}} - \sum_{h=1}^{n-1} \psi_h(\bar{z}) \right| + \sum_{h=n+1}^{\infty} |\psi_h(\bar{z})|,$$

so für $n = 1$

$$\leq \left| \frac{1}{\bar{z}} \right| + \sum_{h=2}^{\infty} \frac{1}{2^{h+1}} = \left| \frac{1}{\bar{z}} \right| + \frac{1}{4},$$

während für $n > 1$ gilt

$$\leq \frac{1}{2^n} + \sum_{h=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^{h+1}} < \frac{1}{2^{n-1}}.$$

¹⁴⁾ Vgl. C. Runge, Zur Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen, Acta Math. VI (1885), S. 229–244.

Liegt hingegen $\bar{z}$ im Innenkomplementärgebiet von κ_1 , so ist

$$\left| \sum_1^{\infty} \psi_h(\bar{z}) \right| \leq \sum_1^{\infty} |\psi_h(\bar{z})| < \sum_1^{\infty} \frac{1}{2^{h+1}} = \frac{1}{2}.$$

Zwischen κ_n und κ_{n+1} haben wir

$$\left| \frac{1}{z} - \sum_1^n \psi_h(\bar{z}) \right| < \frac{1}{2^{n+1}},$$

daher

$$(39) \quad \left| \frac{1}{z} - \sum_1^{\infty} \psi_h(\bar{z}) \right| \leq \left| \frac{1}{z} - \sum_1^n \psi_h(\bar{z}) \right| + \\ + \sum_{n+1}^{\infty} |\psi_{h+1}(\bar{z})| < \frac{1}{2^{n+1}} + \sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{2^{h+1}} = \frac{1}{2^n}.$$

$G(z)$ besitzt daher als Pole den Punkt Null und die abzählbar vielen Pole der Funktionen $\psi_h(z)$, deren Häufungspunkte auf dem Einheitskreis liegen. Nach (39) gilt auf k_n , welcher Kreis ja zwischen κ_n und κ_{n+1} liegt, die Beziehung

$$(40) \quad |G(z)| < \frac{1}{2^n}.$$

(Eingegangen am 28. Juli 1918.)

Über Extremumsätze bei der konformen Abbildung des Äußeren des Einheitskreises.

Von

Karl Löwner in Prag.

Wenn eine analytische Funktion

$$\zeta = f(z)$$

das Innere des Einheitskreises $|z| < 1$ auf ein schlichtes, den Punkt ∞ nicht enthaltendes Gebiet abbildet, so existieren nach dem Koebeschen Verzerrungssatz für den Quotienten

$$\left| \frac{f'(z)}{f'(0)} \right|$$

Schranken, die nur vom Betrage von z abhängen. An der Bestimmung dieser Schranken haben sich verschiedene Autoren¹⁾ beteiligt. Es ist

$$\frac{1 - |z|}{(1 + |z|)^3} \leq \left| \frac{f'(z)}{f'(0)} \right| \leq \frac{1 + |z|}{(1 - |z|)^3}.$$

Das Gleichheitszeichen tritt nur bei den Funktionen

$$f(z) = A \left(\frac{1 + \varepsilon z}{1 - \varepsilon z} \right)^2 + B$$

$(A, B, \varepsilon \text{ Konstanten, } A \neq 0, |\varepsilon| = 1)$

1. Sie vermitteln die Abbildung des Innern des Einheitskreises $|z| < 1$

¹⁾ Die genaue Gestalt der Schranken ist von Plemelj und von Pick angegeben worden. Siehe G. Pick, Leipziger Berichte 1916, S. 58–64. Eine in der Formel enthaltene, zunächst nur vermutungsweise bewertete Konstante, wird durch eine Fabersche Abschätzungsformel sichergestellt. Siehe G. Faber, Münchener Berichte 1916, S. 39–42. Vgl. auch L. Bieberbach, Berliner Ber. 38 (1916), S. 940–955. — Unabhängig von den genannten Autoren hat auch G. H. Gronwall die Schranken gefunden. Siehe G. H. Gronwall, C. R. 162 (1916), S. 249–251.

auf von einer Halbgeraden begrenzte Schlitzbereiche; wir wollen sie in der Folge die Bereiche $\mathfrak{G}$ nennen.

In der vorliegenden Arbeit sollen nun diese Sätze zugleich mit anderen verwandten Extremumsätzen der Funktionentheorie auf Funktionen $\zeta = f(z)$ übertragen werden, die das *Außere* des Einheitskreises $|z| = 1$ auf ein schlichtes, *den Punkt ∞ enthaltendes* Gebiet abbilden, wobei wir der Abbildung noch die Bedingung auferlegen, *den Punkt ∞ fest zu lassen*. Die Potenzreihenentwicklung einer solchen Funktion hat also jedenfalls die Gestalt

$$(3) \quad f(z) = c_{-1}z + c_0 + \frac{c_1}{z} + \dots \quad (c_{-1} \neq 0)$$

Wir werden die Aufgabe zu lösen haben, in Analogie zu dem gewöhnlichen Verzerrungssatz den Quotienten

$$\left| \frac{f'(z)}{f'(\infty)} \right|$$

abzuschätzen. Wie wir sehen werden, lassen sich auch hier scharfe, d. h. nicht weiter durch bessere ersetzbare Schranken angeben, die nur von dem absoluten Betrage von z abhängen.

Bei unseren Überlegungen werden wir neben den in Formel (1) angegebenen scharfen Schranken für den gewöhnlichen Verzerrungssatz noch zwei Extremumsätze benutzen, die von Bieberbach und Faber aufgestellt worden sind und später an passender Stelle formuliert werden sollen.

§ 1.

Wir gehen an die Übertragung des Verzerrungssatzes für die in der Einleitung charakterisierte Funktionenklasse, und zwar werden wir zuerst die *untere* scharfe Schranke für $\left| \frac{f'(z)}{f'(\infty)} \right|$ aufsuchen. Dazu haben wir noch einige Vorbereitungen nötig.

Den in (1) formulierten Verzerrungssatz kann man auf mannigfache neue Formen bringen, indem man an Stelle des Inneren des Einheitskreises $|z| = 1$ irgendein anderes einfach zusammenhängendes Gebiet als Grundgebiet treten läßt²⁾. Wir wählen dafür einen von einer Halbgeraden begrenzten Schlitzbereich $\mathfrak{G}$ der η -Ebene. Wir nehmen der Einfachheit halber an, daß der Schlitz mit der negativen reellen Achse zusammenfällt.

²⁾ Auf die Fruchtbarkeit solcher Übertragungen hat G. Pick hingewiesen (Leipziger Berichte 1916, S. 58–64, Schlußabsatz).

Es sei

$$\zeta = \varphi(\eta)$$

in ihm definierte reguläre, ihn schlicht auf ein den unendlich fernen Punkt nicht enthaltendes Gebiet abbildende Funktion. Die weitere Funktion

$$\eta = \omega \left(\frac{1+z}{1-z} \right)^2 \quad (\omega > 0)$$

ermittelt eine Abbildung des Inneren des Einheitskreises $|z| = 1$ auf einen Schlitzbereich, so daß dabei die Strecke $-1 < z < 1$ in die positive reelle Achse übergeht. Indem wir (4) und (5) zusammensetzen, erhalten wir eine Abbildung des Gebietes $|z| < 1$ auf ein schlichtes Gebiet und können auf sie die Formel (1) anwenden. Es ergibt sich

$$\left| \frac{1+z}{(1-z)^3} \frac{\varphi'(\eta)}{\varphi'(\omega)} \right| \leq \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3}.$$

Nehmen wir z reell und positiv an, dann nimmt die Formel eine besonders einfache Gestalt an

$$\left| \frac{\varphi'(\eta)}{\varphi'(\omega)} \right| \leq 1.$$

Die Voraussetzung, daß z positiv ist, bedeutet aber für η , daß es auf der positiven reellen Achse rechts von ω gelegen ist. Wir erhalten so folgenden Satz:

Satz I. Wenn eine analytische Funktion $\zeta = \varphi(\eta)$ einen Schlitzbereich $\mathfrak{G}$ auf ein schlichtes, den Punkt ∞ nicht enthaltendes Gebiet abbildet, so ist der Abbildungsmodul $|\varphi'(\eta)|$ auf der geradlinigen Verlängerung des Schlitzes jedenfalls eine nicht zunehmende Funktion der Distanz von seinem Endpunkt.

Nun wissen wir, daß im Verzerrungssatz für positive z die obere Schranke nur erreicht werden kann, wenn die Abbildungsfunktion die Gestalt besitzt: $A \left(\frac{1+z}{1-z} \right)^2 + B$ ($A \neq 0$). Wir können also vervollständigend sagen:

Nimmt $|\varphi'(\eta)|$ für zwei Punkte der Verlängerung denselben Wert an, so ist $\zeta = \varphi(\eta)$ eine ganze lineare Funktion.

Aus Satz I ziehen wir jetzt eine einfache Folgerung.

Wir betrachten einen von einer Strecke begrenzten Schlitzbereich der Ebene — wir nennen ihn einen Schlitzbereich $\mathfrak{S}$. — Sie sei etwa auf der negativen reellen Achse gelegen und reiche gerade bis zum Nullpunkt hin. Die Funktion $\zeta = \varphi(\eta)$ bilde ihn schlicht mit Festhaltung des Punktes ∞ . Aus $\mathfrak{S}$ stellen wir uns einen Schlitzbereich $\mathfrak{G}$ her, indem wir in ihm den Rest der negativen reellen Achse tilgen. Da $\varphi(\eta)$ auch den neuen

Bereich schlicht abbildet, jetzt aber auf einen Bereich, der $\zeta = \infty$ nicht mehr enthält, so können wir den Satz I anwenden und erhalten das Resultat

Satz II. Wenn $\zeta = \psi(\eta)$ einen Schlitzbereich $\mathfrak{S}$ mit Festhaltung des Punktes ∞ schlicht abbildet, so ist der Abbildungsmodul $|\psi'(\eta)|$ auf den beiden geradlinigen Verlängerungen des Schlitzes eine nicht zunehmende Funktion der Entfernung von seinem Mittelpunkt. Ist er auf einer Teilstrecke konstant, so ist die Abbildung eine Ähnlichkeitsformation.

Nach diesen Vorbereitungen sind wir gleich am Ziele. Es sei $\zeta = f(z)$ eine das Äußere des Einheitskreises schlicht abbildende Funktion, die $z = \infty$ festhält. Wir betrachten gleichzeitig die Funktion

$$(6) \quad \eta = z + \frac{1}{z},$$

die das Gebiet $|z| > 1$ auf den von der Strecke $-2 \leq \eta \leq 2$ begrenzten Schlitzbereich abbildet. Der Punkt ∞ geht wieder in sich selbst über. Der Halbgeraden $1 < z < \infty$ entspricht in der η -Ebene die Schlitzverlängerung $2 < \eta < \infty$.

(Ebenso entspricht den Punkten $-\infty < z < -1$ die Halbgerade $-\infty < \eta < -2$.)

Indem wir nun ζ als Funktion von η in unserem Schlitzbereiche auffassen, können wir den Satz II anwenden und kommen zu dem Resultate, daß

$$\frac{|f'(\varrho)|}{1 - \frac{1}{\varrho^2}}$$

für Werte $\varrho > 1$ eine nicht zunehmende Funktion von ϱ darstellt. Gleichheit kann für zwei verschiedene Werte von ϱ nur eintreten, wenn

$$(7') \quad f(z) = A \left(z + \frac{1}{z} \right) + B \quad (A \neq 0)$$

ist. Indem wir durch eine Drehung der z -Ebene um ihren Nullpunkt die positive reelle Achse in eine andere vom Nullpunkt ausgehende Halbgerade überführen und dann unser Ergebnis anwenden, erhalten wir den folgenden allgemeineren Satz:

Satz III. Bildet die Funktion $\zeta = f(z)$ das Äußere des Einheitskreises $|z| = 1$ unter Festhaltung des unendlich fernen Punktes schlicht ab, so ist

$$\frac{\left| f' \left(\frac{\varrho}{\varepsilon} \right) \right|}{1 - \frac{1}{\varrho^2}} \quad (|\varepsilon| = 1)$$

im Intervall $1 < \varrho \leq \infty$ eine nicht zunehmende Funktion von ϱ . Gleich-

ist für zwei verschiedene Werte von ϱ bei festgehaltenem ε kann nur in den Funktionen

$$f(z) = A \left(\varepsilon z + \frac{1}{\varepsilon z} \right) + B$$

(A, B, ε bezeichnen Konstanten, $A \neq 0$, $|\varepsilon| = 1$)

treten. Sie bilden das Äußere des Einheitskreises auf von endlichen Strecken begrenzte Schlitzbereiche ab.

Aus Satz III ergibt sich als unmittelbare Folgerung:

Satz IV. Genügt $\zeta = f(z)$ den in Satz III angegebenen Bedingungen, ist

$$\left| \frac{f'(z)}{f'(\infty)} \right| \geq 1 - \frac{1}{|z|^2}.$$

Gleichheit kann nur bei den in (7) angegebenen Funktionen eintreten.

Formel (8) gibt die untere scharfe Schranke für den neuen Vergrößerungssatz an.

Wir gehen jetzt an die Aufsuchung der oberen scharfen Schranke für $\left| \frac{f'(z)}{f'(\infty)} \right|$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, daß $f'(\infty) = 1$ ist. Die Potenzreihenentwicklung von $f(z)$ lautet dann

$$f(z) = z + c_0 + \frac{c_1}{z} + \dots$$

Es handelt sich um die Abschätzung des Ausdrucks

$$|f'(z)| = \left| 1 - \frac{c_1}{z^2} - 2 \frac{c_2}{z^3} - \dots \right|.$$

Zu diesem Zwecke werden wir uns des folgenden Flächensatzes bedienen, der eine Abschätzung der Koeffizienten

$$c_1, c_2, \dots$$

bestimmt. Er besagt nichts anderes, als daß der (äußere) Inhalt A des Komplements des Bildbereiches bei unserer Abbildung keinen negativen Wert besitzen kann. Nun ist

$$A = \pi (1 - |c_1|^2 - 2|c_2|^2 - 3|c_3|^2 - \dots).$$

Wir bekommen also die Ungleichung

$$|c_1|^2 + 2|c_2|^2 + 3|c_3|^2 + \dots \leq 1.$$

In (10') ist auch die Aussage enthalten, daß

$$A \leq \pi$$

Wir sehen also, daß das Komplement des Bildbereichs bei schlichter

^{a)} Vgl. L. Bieberbach, Berl. Sitzungsber. 38 (1916), S. 940–955, sowie Faber, Münch. Ber. 1916, S. 39–42.

Abbildung eines Kreises mit dem Abbildungsmodul 1 im Unendlichen der Fläche nach nicht größer sein kann als der Kreis selbst⁴⁾.

Dieser Flächensatz ist in Analogie gebildet worden zu einem anderen ebenfalls von Bieberbach angegebenen Satze⁵⁾, der hier gleich angeführt werden soll, da er bald Verwendung finden wird. Er besagt: Bei einer schlichten Abbildung des Inneren eines Kreises mit dem Abbildungsmodul 1 im Mittelpunkt kann der (innere) Inhalt J des Bildbereiches nicht kleiner sein als die Fläche des Kreises selbst. Bildet nämlich etwa

$$(13) \quad \zeta_1 = \alpha_0 + z + \alpha_1 z^2 + \alpha_2 z^3 + \dots$$

den Einheitskreis $|z| < 1$ schlicht ab, so ist

$$(10'') \quad J = \pi(1 + 2|\alpha_1|^2 + 3|\alpha_2|^2 + 4|\alpha_3|^2 + \dots)$$

Es ist also jedenfalls

$$(12'') \quad J \geq \pi.$$

Wie die Formeln (10') und (10'') lehren, kann in (12') und (12'') das Gleichheitszeichen nur eintreten, wenn die Abbildung eine Bewegung ist.

Wir knüpfen an die Gleichung (9) an. Aus ihr folgt zuerst

$$(14') \quad |f'(z)| \leq 1 + \frac{|c_1|}{|z|^2} + 2 \frac{|c_2|}{|z|^3} + 3 \frac{|c_3|}{|z|^4} + \dots$$

Die rechte Seite von (14') vergrößern wir nun mit Zuhilfenahme des bekannten Satzes: Wenn die Reihen

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots,$$

$$\beta_1 + \beta_2 + \dots$$

absolut konvergieren, so ist

$$(15) \quad |\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \dots| \leq \sqrt{|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + \dots} \sqrt{|\beta_1|^2 + |\beta_2|^2 + \dots}$$

Das Gleichheitszeichen gilt nur, wenn die beiden Größensysteme

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots$$

$$\beta_1, \beta_2, \dots$$

einander proportional sind.

Wir setzen

$$\alpha_r = \sqrt{r} |c_r|, \quad \beta_r = \frac{\sqrt{r}}{|z|^{r+1}} \quad (r = 1, 2, \dots)$$

⁴⁾ Vgl. die Fußnote ³⁾.

⁵⁾ Vgl. L. Bieberbach, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo 38 (1914), S. 98–112 [S. 105].

d erhalten nach (15)

$$4'') \quad \frac{|c_1|}{|z|^2} + \frac{2|c_2|}{|z|^3} + \frac{3|c_3|}{|z|^4} + \dots \leq \sqrt{|c_1|^2 + 2|c_2|^2 + 3|c_3|^2 + \dots}$$

$$\sqrt{\frac{1}{|z|^4} + \frac{2}{|z|^6} + \frac{3}{|z|^8} + \dots}$$

d weiter wegen (11)

$$4''') \quad |f'(z)| \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{|z|^2}}. \quad 4)$$

Kann die Schranke auch erreicht werden?

Wenn dies für den Punkt $\frac{\varrho}{\varepsilon}$ ($|\varepsilon| = 1$, $\varrho > 1$) stattfinden soll, so muß er ihn in den Ungleichungen (11), (14'), (14'') das Gleichheitszeichen gesetzt werden können. Dadurch ist aber, wie eine einfache Überlegung zeigt, die Funktion bis auf eine additive Konstante B eindeutig bestimmt. Sie lautet

$$6') \quad \zeta = z - \frac{1}{\varepsilon} \left(\varrho - \frac{1}{\varrho} \right) \frac{1}{\varrho \varepsilon z - 1} + B.$$

Da sie auch *schlicht* abbildet, so ist damit bewiesen, daß in (14''') der Tat das Gleichheitszeichen gelten kann. Indem wir die Beschränkung Unendlichen aufheben, können wir die erhaltenen Resultate so zusammenfassen:

Satz V. Wenn eine analytische Funktion $\zeta = f(z)$ das Gebiet $|z| > 1$ schlicht unter Festhaltung des Punktes ∞ abbildet, dann ist

$$4) \quad \left| \frac{f'(z)}{f'(\infty)} \right| \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{|z|^2}}.$$

Das Gleichheitszeichen tritt für den Punkt $z = \frac{\varrho}{\varepsilon}$ ($|\varepsilon| = 1$, $\varrho > 1$) nur bei den Funktionen

$$6) \quad \zeta = A \left(z - \frac{1}{\varepsilon} \left(\varrho - \frac{1}{\varrho} \right) \frac{1}{\varrho \varepsilon z - 1} \right) + B,$$

(A, B Konstante, $A \neq 0$)

n. Es ist zu beachten, daß sie gerade nur für den Punkt $z = \frac{\varrho}{\varepsilon}$ in (14) das Gleichheitszeichen verwirklichen.

Zur näheren Charakterisierung der durch die Funktionen (16) ver-

*) Wir machen von der Gleichung Gebrauch:

$$1 + \frac{2}{|z|^2} + \frac{3}{|z|^4} + \dots = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{|z|^2}\right)^2}.$$

mittelten Abbildungen führe ich folgende später noch zu benützende Eigenschaften von ihnen an, die man leicht verifizieren kann.

1. Der Bildbereich besteht in einem von einem Kreisbogen begrenzten Schlitzbereich, — wir nennen ihn einen Schlitzbereich $\mathfrak{R}$.

2. Der Radius des Kreises, auf dem der Kreisbogen liegt, hat den Wert ϱ .

3. Der Punkt $\frac{\varrho}{\varepsilon}$ geht in den Mittelpunkt des Kreises über.

Ich führe hier noch einen zweiten, mehr geometrischen Beweis für den Satz V an, den die Kenntnis der die obere Schranke in (14) liefernden Funktionen nahelegt. Wir verfahren ähnlich wie beim Beweise des Satzes III.

Wir denken uns in der η -Ebene einen Schlitzbereich $\mathfrak{R}$ gelegen und in ihm eine Funktion $z = \varphi(\eta)$ definiert, die ihn unter Festhaltung des Punktes ∞ schlicht abbildet.

Ich behaupte, daß dann folgender Satz gilt:

Satz VI. *Der Abbildungsmodul μ im Mittelpunkte des den Schlitz tragenden Kreises K kann nicht größer sein als der Abbildungsmodul im Unendlichen, d. h. es ist*

$$(17) \quad \mu \leq |\varphi'(\infty)|.$$

Das Gleichheitszeichen tritt nur bei ganzen linearen Funktionen ein.

Beweis. Die Funktion $z = \varphi(\eta)$ vermittelt gleichzeitig eine Abbildung der Kreissinnern und Kreisäußern von K , so daß die beiden Flächensätze (12') und (12'') angewendet werden können. Es ist also, wenn ϱ den Radius des Kreises, J den inneren Inhalt des Bildes des Kreisinneren, A den äußeren Inhalt des Komplements des Bildes vom Kreisäußeren bedeutet,

$$(18) \quad J \geq \mu^2 \varrho^2 \pi,$$

$$(19) \quad A \leq |\varphi'(\infty)|^2 \varrho^2 \pi.$$

Da nun offenbar

$$J \leq A$$

sein muß, so ergibt sich sofort der Satz VI samt Zusatz, da (18) und (19) nur bei ganzen linearen Funktionen mit dem Gleichheitszeichen gelten.

Indem wir nun eine Funktion $\zeta = f(z)$ hernehmen und sie mit den Funktionen (16) zusammensetzen (wobei wir in diesen den Buchstaben ζ durch η zu ersetzen haben, erhalten wir Abbildungen der in Satz VI betrachteten Art. Die Anwendung der Ungleichung (17) für den Punkt z , der in den Mittelpunkt des Kreisbogenschlitzes übergeht, führt dann, wenn man die Eigenschaften der Funktionen (16) beachtet, die wir angeführt haben, zu dem Satz V zurück.

Die Sätze IV und V enthalten die gewünschte Übertragung des Verzerrungssatzes.

§ 2.

Wir wollen jetzt eine Anwendung unserer Sätze machen. Es sei $f(z)$ eine Funktion, die die schon oft genannten Bedingungen erfüllt. Aus Bequemlichkeit halber setzen wir voraus, daß $|f'(\infty)| = 1$ ist, so daß $f(z)$ eine Potenzreihenentwicklung der Form (3') besitzt.

Wir legen uns die folgende Frage vor: Zwischen welchen Grenzen δ in die Distanz δ des Punktes $\zeta = f(z)$ vom Rande des Bildbereiches liegen, wenn der Betrag von z gegeben ist?

Wir suchen zuerst wieder die untere Schranke. Es sei a der dem Punkte $\zeta = f(z)$ am nächsten gelegene Randpunkt. Dann verläuft die Strecke $a - \zeta$ ganz im Bildbereiche und es ist

$$\delta = \int |dw| = \int \left| \frac{dw}{dz} \right| |dz|,$$

bei das zweite Integral längs der Bildkurve der Strecke $a - \zeta$ in der Ebene zu erstrecken ist. Es ist also wegen (8)

$$\delta \geq \int_1^{|z|} \left(1 - \frac{1}{e^x} \right) dx$$

$$\delta \geq |z| + \frac{1}{|z|} - 2,$$

mit die gesuchte Schranke gefunden ist. Sie wird bei den Abbildungen (7) mit $|A| = 1$) und nur bei ihnen erreicht.

Die scharfe obere Schranke für δ kann man am einfachsten folgendermaßen finden: Von der Vermutung ausgehend, daß die Abbildungen auf Kreisbogenschlitzbereiche den größten Wert für δ bei festgehaltenem Betrag $|z|$ liefern, und zwar in dem Punkte, der in den Mittelpunkt des den Schlitz tragenden Kreises K übergeht, beweisen wir zuerst den

Satz VII. Bei Abbildungen eines Kreisbogenschlitzbereichs mit dem Abbildungsmodul 1 im Unendlichen verkleinert sich die Randdistanz zum Mittelpunkt. Nur bei Bewegungen bleibt sie erhalten.

Beweis. Es sei $\zeta = \zeta(\eta)$ eine Funktion, die eine unseren Bedingungen genügende Abbildung vermittelt, η_0 der Mittelpunkt von K und ζ_0 sein Bildpunkt.

Wir bilden den Quotienten

$$q(\eta) = \frac{\zeta(\eta) - \zeta_0}{\eta - \eta_0}.$$

Er stellt eine im Schlitzbereich mit Einschluß des Punktes ∞ reguläre Funktion dar und es ist nach Voraussetzung

$$|q(\infty)| = 1.$$

Wenn also $q(\eta)$ nicht eine Konstante vom Betrage 1 ist, so muß es nach einem bekannten Satze der Funktionentheorie auf dem Schlitz einen Punkt geben, für den

$$|q(\eta)| < 1$$

wird oder für den

$$|\zeta(\eta) - \zeta_0| < \epsilon$$

ist. Das ist aber der behauptete Satz.

Damit ist aber auch unsere Vermutung bestätigt; denn sie ist offenbar nichts anderes als eine andere Formulierung unseres Satzes und wir sehen also, daß die Ungleichung besteht:

$$(21) \quad \delta \leq |z|,$$

und daß das Gleichheitszeichen nur bei den Abbildungen (16) (mit $|A| = 1$) eintreten kann.

Wir fassen jetzt unsere Resultate betreffend δ zusammen:

Satz VIII. Wenn $\zeta = f(z)$ eine schlichte Abbildung des Äußeren des Einheitskreises vermittelt und der Abbildungsmodul im Unendlichen den Wert 1 besitzt, so ist die Distanz des Punktes ζ vom Rande des Bildes zwischen die Grenzen eingeschlossen:

$$(22) \quad |z| + \frac{1}{|z|} - 2 \leq \delta \leq |z|.$$

Die untere Grenze wird nur bei Abbildungen auf von einer Strecke gebildete Schlitzbereiche erreicht, die obere nur bei Abbildungen auf Kreisbogen-schlitzbereiche.

Wir wollen jetzt noch eine weitere Abschätzung vornehmen, die mit den letztgemachten nahe verwandt ist. Es sei $\zeta = f(z)$ eine Abbildungsfunktion, die im Unendlichen in die Identität übergeht, also eine Reihenentwicklung von der Gestalt

$$(3'') \quad \zeta = z + \frac{c_1}{z} + \dots$$

besitzt. Es fehlt also auch das konstante Glied. Wir wollen jetzt $|\zeta|$ selbst, und zwar nach oben abschätzen.

Wir führen die gewünschte Abschätzung auf einen Satz von Bieberbach⁷⁾ zurück. Dieser besagt, daß bei unserer Abbildung der Rand des Bildbereiches in der ζ -Ebene keinen Punkt außerhalb des Kreises $|\zeta| = 2$

⁷⁾ L. Bieberbach, l. c. 7).

itzen kann und daß auf der Peripherie des letzteren nur dann Punkte
gen, wenn es sich um die Abbildungen

$$\zeta = z + \frac{1}{\varepsilon^2 z} \quad (|\varepsilon| = 1)$$

ndelt⁹⁾. Es sind das Abbildungen auf symmetrisch zum Nullpunkt
egene Schlitzbereiche $\mathfrak{S}$.

Man kann sagen, daß der Bieberbachsche Satz unsere Aufgabe für
unkte $|z| = 1$ erledigt.

Wir verfahren folgendermaßen: Es sei $z = \varrho > 1$ derjenige Punkt, für
a wir ζ abschätzen wollen. Wir schlitzten das Äußere des Einheitskreises
gs der reellen Achse von 1 bis ϱ und symmetrisch dazu auf der negativen
llen Achse auf. Der so entstehende Bereich *enthält den Punkt* $z = \varrho$
dem Rande. Bildet man ihn durch eine Funktion, die im Unendlichen
die Identität übergeht, auf das Äußere eines Kreises ab, so erhält dieser
n Radius $a = \frac{\varrho + \frac{1}{\varrho}}{2}$. Wendet man also jetzt den soeben genannten
eberbachschen Satz an, so ergibt sich

$$|f(\varrho)| \leq \varrho + \frac{1}{\varrho}.$$

Indem wir wieder zu Punkten allgemeiner Lage übergehen, können
das gewonnene Resultat so aussprechen.

Satz IX. *Bildet die Funktion*

$$\zeta = z + \frac{c_1}{z} + \dots$$

3) *Äußere des Einheitskreises schlicht ab, so ist*

$$|\zeta(z)| \leq |z| + \frac{1}{|z|}.$$

Nur bei den Funktionen

$$\zeta = z + \frac{1}{\varepsilon^2 z} \quad (|\varepsilon| = 1)$$

tt das Gleichheitszeichen ein.

§ 3.

Zum Schluß wollen wir untersuchen, wie sich die in § 1 und § 2
wonnenen Schranken ändern, wenn man den betrachteten Abbildungen
ch die weitere Bedingung auferlegt, daß das Komplement des Bildbereiches
en *konvexen Bereich* darstellen soll. *Da sehen wir sofort, daß die*

⁹⁾ Ersetzt man den Radius 1 durch a , so tritt natürlich an Stelle der Schranke 2
Schranke $2a$.

Ungleichungen (8), (20) und (23) auch für die verengerte Funktionenklasse die scharfen Schranken liefern, da die Funktionen, von denen sie erreicht werden, ihr selbst angehören. Dagegen erfahren die in (14) und (21)

angegebenen oberen Schranken für $\left| \frac{f'(z)}{f'(\infty)} \right|$ und die Randdistanz δ eine Erniedrigung in dem Sinne, daß jetzt die geradlinigen Schlitzbereiche $\mathfrak{S}$ alle Grenzwerte übernehmen. Wir zeigen dies zuerst für den Quotienten $\left| \frac{f'(z)}{f'(\infty)} \right|$.

Es sei $\zeta = k(z)$

eine „konvex“ abbildende Funktion,

$$k'(\infty) = 1.$$

Dann bildet die Funktion

$$f(z) = z k'(z)$$

jedenfalls schlicht ab⁹⁾, und zwar so, daß die Abbildung im Unendlichen in die Identität übergeht. Wir können deshalb auf $|f(z)|$ die Ungleichung (23) anwenden und erhalten sofort die obere scharfe Schranke für $|k'(z)|$. Es ist

$$|k'(z)| \leq 1 + \frac{1}{|z|^2}.$$

Der Verzerrungssatz für konvex abbildende Funktionen kann also durch die Ungleichungen

$$(24) \quad 1 - \frac{1}{|z|^2} \leq \left| \frac{k'(z)}{k'(\infty)} \right| \leq 1 + \frac{1}{|z|^2}$$

ausgedrückt werden. Beide Schranken werden nur bei Abbildungen auf Schlitzbereiche $\mathfrak{S}$ erreicht.

Endlich soll noch die obere scharfe Schranke für die Randdistanz δ aufgesucht werden; $k'(\infty)$ soll den Wert 1 besitzen. Wir untersuchen die Randdistanz des Bildpunktes von $z = \varrho > 1$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir weiter annehmen, daß $k(\varrho) = 0$ ist und daß der am nächsten gelegene Randpunkt a auf der negativen reellen Achse gelegen ist¹⁰⁾. Rechts von der durch ihn gelegten Parallelen zur imaginären Achse kann sich kein Punkt des Komplements mehr befinden, weil sonst wegen der Konvexität Punkte im Komplement sich befänden, die näher an 0 wären wie a .

Wir betrachten außerdem die durch

$$\zeta_1 = z - \frac{1}{z} - \left(\varrho - \frac{1}{\varrho} \right)$$

⁹⁾ K. Löwner, Leipziger Berichte 69 (1917), S. 105.

¹⁰⁾ Nötigenfalls müssen wir $k(z)$ durch eine der Funktionen $\frac{1}{\varepsilon} k(\varepsilon z)$ ($|\varepsilon| = 1$) ersetzen.

nierte Abbildung auf den Schlitzbereich $\mathfrak{S}$, dessen Schlitz symmetrisch zur reellen Achse im Abstände $\varrho - \frac{1}{e}$ links von der imaginären Achse gelegen ist. Die Differenz

$$\zeta - \zeta_1$$

verschwindet, als Funktion von ζ_1 aufgefaßt, für $\zeta_1 = 0$ und verhält sich im ganzen Schlitzbereich regulär, auch im Punkte ∞ , da die Entwicklungen beider Funktionen mit dem Glied z beginnen. Aus diesen Tatsachen folgt, daß der Realteil der Differenz $(\zeta - \zeta_1)$ am Schlitzrand positive Werte annehmen muß, falls er nicht identisch verschwindet. Daraus folgt aber die Ungleichung

$$|\alpha| \leq \varrho - \frac{1}{e}.$$

Das Gleichheitszeichen tritt wegen

$$(\zeta - \zeta_1)_{\zeta_1=0} = 0$$

ein, wenn

$$\zeta \equiv \zeta_1$$

Damit ist bewiesen:

Die Randdistanz δ bei konvex abbildenden Funktionen mit dem Abbildungsmodul 1 im Punkte ∞ genügt der Ungleichung

$$\delta \leq |z| - \frac{1}{|z|}.$$

Das Gleichheitszeichen tritt nur bei Abbildungen auf Schlitzbereiche $\mathfrak{S}$ ein.

(Eingegangen am 21. August 1918.)

Eine Anwendung des Koebeschen Verzerrungssatzes auf ein Problem der Hydrodynamik.

Von

Philipp Frank und Karl Löwner in Prag.

Wir betrachten einen unendlich langen Zylinder, der senkrecht zu seiner Achse geradlinig mit der konstanten Geschwindigkeit 1 durch eine ideale inkompressible Flüssigkeit bewegt wird. Die Flüssigkeit in der Nähe des Zylinders wird dadurch in Bewegung geraten und es ist klar, daß diese Bewegung die Flüssigkeitsteilchen um so weniger erfassen wird, je weiter sie von dem Zylinder entfernt sind. Es ist also anzunehmen, daß außerhalb einer den Zylinder umschließenden Parallelfäche, die seine Bewegung mitmacht, die Geschwindigkeit der Flüssigkeit eine gewisse Grenze nicht übersteigen kann, die um so kleiner sein wird, je größer der Abstand der zylindrischen Fläche von der sie einschließenden Parallelfäche im Verhältnis zu den linearen Abmessungen des Zylinderquerschnittes ist. Im folgenden soll nun gezeigt werden, daß man wirklich eine solche Grenze angeben kann, in der nichts weiter vorkommt als das Verhältnis der Breite des Zylinderquerschnittes (d. h. des Abstandes seiner zwei am weitesten voneinander entfernten Punkte) zum Abstand der Parallelfäche, ohne daß über die Gestalt des Querschnittes irgend etwas bekannt sein müßte.

Da es sich um ein ebenes Problem handelt und die Strömung wirbelfrei ist, können die Methoden der konformen Abbildung durch Funktionen einer komplexen Veränderlichen herangezogen werden. Wenn wir das Koordinatensystem, in dem wir die Strömung beschreiben, als starr mit dem Zylinder verbunden ansehen, so findet relativ zu diesem eine Strömung statt, die im Unendlichen eine Parallelströmung mit der Geschwindigkeit 1 ist. Wir betrachten das Strömungsbild in einer zur Zylinderachse senkrechten Ebene, die wir zur x, y -Ebene wählen, und können dann unser Problem auch folgendermaßen formulieren:

In der x, y -Ebene sei ein von einer einfach geschlossenen Randkurverenzter Bereich gegeben. Außerhalb dieses Flächenstückes (des Zylinderfilms) finde in der ganzen Ebene eine stationäre, wirbelfreie (auch zirkulationsfreie) Strömung einer idealen inkompressiblen Flüssigkeit statt, die Unendlichen in eine Parallelströmung mit der Geschwindigkeit 1 in Richtung der x -Achse übergeht. Wenn wir nun zur Randkurve Profils eine äußere Parallelkurve im Abstände ϱ ziehen, so wird gesagt, zwischen welchen Grenzen der absolute Betrag der Geschwindigkeit außerhalb der Parallelkurve gelegenen Punkten noch schwanken kann, wenn wir vom Profil nichts wissen als seine Breite β . Die beiden Grenzen gehen im Unendlichen gegen 1 und es ist die Frage, um wieviel sie bei gegebenem ϱ und β noch von 1 abweichen können.

Eine derartige Strömung kann man bekanntlich durch eine komplexe Strömungsfunktion darstellen. Die Geschwindigkeitskomponenten der Strömung u und v genügen als Funktionen der Koordinaten den Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Daher existiert ein Geschwindigkeitspotential φ , das den Gleichungen

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y};$$

eine Stromlinienfunktion ψ , die den Gleichungen

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

genügt. Dann erfüllen φ und ψ die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen und

$$W = \varphi + i\psi$$

eine Funktion der komplexen Veränderlichen $z = x + iy$, die komplexe Strömungsfunktion; ihre Ableitung erfüllt nach Gleichungen (3) und (4) die Gleichung

$$\frac{dW}{dz} = u - iv.$$

Ist das Profil ein Kreis um den Koordinatenursprung als Mittelpunkt dem Halbmesser a — wir wollen ihn im folgenden immer den Kreis K_a nennen —, so lautet die komplexe Strömungsfunktion bekanntlich ¹⁾

$$W = z + \frac{a^2}{z}.$$

¹⁾ Vgl. z. B. H. Lamb, Lehrbuch der Hydrodynamik, Leipzig 1907, S. 94, Gleichung (9).

Sie ergibt wegen Gleichung (6) offenbar im Unendlichen die Geschwindigkeit 1 in der Richtung der reellen Achse.

Wir führen nun eine Funktion der komplexen Veränderlichen z ,

$$(8) \quad \zeta = \zeta(z),$$

ein, die das Äußere des Kreises K_a auf das schlichte Äußere irgendeiner anderen einfach geschlossenen (Jordanschen) Kurve abbildet. Setzen wir dann die Umkehrfunktion von (8)

$$(9) \quad z = z(\zeta)$$

in Gleichung (7) ein, so erhalten wir eine Funktion

$$(10) \quad W^*(\zeta) = W(z(\zeta)),$$

die wir als eine Strömungsfunktion in der ζ -Ebene auffassen können. Durch sie dargestellte Strömung umfließt offenbar dasjenige Profil, dessen Randkurve durch die Abbildung (8) aus dem Kreis K_a hervorgeht. Wenn die Abbildung noch so beschaffen ist, daß sie im ganzen Äußeren von K_a also für $|z| > a$ regulär ist und im Unendlichen in die Identität $\zeta = z$ übergeht, so ist die durch (10) dargestellte Strömung auch wieder im Unendlichen eine Parallelströmung mit der Geschwindigkeit 1 in der Richtung der reellen Achse. Die Gleichung (8) hat dann die Form

$$(11) \quad \zeta = z + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \dots$$

Wenn uns also ein Profil in der ζ -Ebene gegeben ist, so müssen wir suchen, durch eine Funktion von der Form (11) das Äußere des Kreises K_a der z -Ebene auf das Äußere des gegebenen Profils abzubilden. Nach den allgemeinen Abbildungssätzen ist durch die Bedingung, daß die Abbildung im Unendlichen in die identische übergehen soll, die Lösbarkeit unserer Abbildungsaufgabe durch zwei Bedingungen beschränkt:

Erstens ist durch das gegebene Profil (und zwar durch dessen Größe) der Halbmesser a des Kreises K_a bestimmt. Das kommt davon, daß in Gleichung (11) der Koeffizient von z gleich 1 gesetzt ist. Zweitens muß ein in ganz bestimmter Lage zum Profil befindlicher Punkt zum Nullpunkt der ζ -Ebene gewählt werden. Das rührt daher, daß in Gleichung (11) das absolute Glied gleich Null gesetzt ist. Diesen ausgezeichneten Punkt in der Ebene des Profils wollen wir vorläufig nach Mises²⁾ den „Mittelpunkt“ des Profils nennen.

Die Größe, die wir abschätzen wollen, ist der absolute Betrag der

²⁾ R. v. Mises, Zeitschr. f. Flugtechn. u. Motorluftschiff, Heft 21/22 (1917). In dieser Arbeit werden auch bereits Extremumsätze der konformen Abbildung zur Lösung hydrodynamischer Aufgaben herangezogen.

umgangsgeschwindigkeit in der ζ -Ebene; wir wollen ihn mit G bezeichnen. n ist nach Gleichungen (6) und (10)

$$G = \left| \frac{dW^*}{d\zeta} \right| = \left| \frac{dW}{dz} \right| : \left| \frac{d\zeta}{dz} \right|,$$

nach Gleichung (7)

$$G = \left| 1 - \frac{a^2}{z^2} \right| : \left| \frac{d\zeta}{dz} \right|.$$

Setzen wir

$$|z| = r,$$

folgt die Ungleichung

$$\left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) : \left| \frac{d\zeta}{dz} \right| \leq G \leq \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) : \left| \frac{d\zeta}{dz} \right|.$$

Der Koebesche Verzerrungssatz ermöglicht nun bekanntlich die Schätzung des Abbildungsmoduls $\left| \frac{d\zeta}{dz} \right|$ unter gewissen Bedingungen. Wenn nämlich das Innere des Kreises K_a schlicht auf das Innere einer einfach geschlossenen Kurve der ζ -Ebene abgebildet wird und der Wert $\left| \frac{d\zeta}{dz} \right|$ im Nullpunkt der z -Ebene den bekannten Wert 1 hat, so läßt sich nach dem Koebeschen Satz dieser Abbildungsmodul für alle Punkte des innerhalb K_a gelegenen konzentrischen Kreises vom Halbmesser r zwischen Grenzen einschließen, die nur vom Verhältnis $\frac{a}{r}$ abhängen³⁾.

Ähnliche Sätze lassen sich nun auch für die schlichte Abbildung des Äußeren des Kreises K_a auf das Äußere einer einfach geschlossenen Kurve der ζ -Ebene aufstellen⁴⁾. Wenn nämlich hier der Abbildungsmodul im Unendlichen den bekannten Wert 1 hat, was sicher der Fall ist, sobald die Abbildung im Unendlichen die Identität ist, so läßt sich $\left| \frac{d\zeta}{dz} \right|$ außerhalb eines den Kreis K_a umschließenden konzentrischen Kreises vom Halbmesser r (also für $r > a$) zwischen Grenzen einschließen, die wieder

³⁾ Die Gestalt dieser Funktionen von $\frac{a}{r}$, deren Existenz Koebe bewiesen hatte, wurde von J. Plemelj und von G. Pick angegeben. (Vgl. G. Pick, Leipziger Ber. 1906, S. 58.) Diese Formel enthielt aber noch eine unbestimmte numerische Konstante, deren zunächst bloß vermuteter Wert sich mit Hilfe einer Formel von Faber, Münchener Berichte 1916, S. 39–42 bestätigen läßt. Die genauen Schranken für $\left| \frac{d\zeta}{dz} \right|$ hat G. H. Gronwall, C. R. 162 (1916), S. 249–251 angegeben. Für die Abbildung des Kreises K_a auf konvexe Bereiche lassen sich engere Grenzen annehmen. Vgl. G. H. Gronwall, C. R. 162 (1916), S. 316–318 sowie K. Löwner, Leipziger Berichte 1917, S. 89–106.

⁴⁾ K. Löwner im vorliegenden Heft dieser Zeitschrift, S. 65–76.

nur vom Verhältnis $\frac{a}{r}$ abhängen. Wir wollen diese Grenzen vorläufig mit f und F bezeichnen. Es ist also

$$(16) \quad f\left(\frac{a}{r}\right) \leq \left| \frac{d\zeta}{dz} \right| \leq F\left(\frac{a}{r}\right).$$

Daraus folgt nach Gleichung (15)

$$(17) \quad \frac{1 - \frac{a^2}{r^2}}{F\left(\frac{a}{r}\right)} \leq G \leq \frac{1 + \frac{a^2}{r^2}}{f\left(\frac{a}{r}\right)}.$$

Nun ist uns aber nur das Profil in der ζ -Ebene gegeben, nicht aber der Halbmesser a des Kreises K_a , auf welchen es durch die Abbildung (11) abgebildet wird. Ferner kennen wir wohl die Lage des Punktes der ζ -Ebene, in dem wir G abschätzen wollen, des „Aufpunktes“, nicht aber die Entfernung r seines Bildpunktes in der z -Ebene vom Ursprung. Auf diese können wir nach zwei Methoden schließen. Die erste stützt sich auf den Satz⁶⁾: Durch eine Abbildung der von uns betrachteten Art kann ein Punkt der z -Ebene, der die Entfernung r ($> a$) vom Ursprung hat, nur in einen Punkt der ζ -Ebene übergehen, dessen Entfernung vom Nullpunkt dieser Ebene, also vom „Mittelpunkt“ des Profils, höchstens $2r$ beträgt. Bezeichnen wir also die Entfernung des Aufpunktes vom Mittelpunkt des Profils mit ϱ , so ist sicher

$$(18) \quad \varrho \leq 2r.$$

Ferner geht durch unsere Abbildung der Kreis K_a in eine Bildkurve über, deren Breite β mindestens gleich seinem Durchmesser ist⁶⁾, also

$$(19) \quad \beta \geq 2a,$$

und daraus folgt

$$(20) \quad \frac{a}{r} \leq \frac{\beta}{\varrho}$$

Da die in Gleichung (16) vorkommende Funktion F eine monoton zunehmende⁷⁾ Funktion ihres Argumentes ist, f aber eine monoton abnehmende, so folgt aus (17) mit Hilfe von (20)

$$(21) \quad \frac{1 - \frac{\beta^2}{\varrho^2}}{F\left(\frac{\beta}{\varrho}\right)} < G < \frac{1 + \frac{\beta^2}{\varrho^2}}{f\left(\frac{\beta}{\varrho}\right)}.$$

⁶⁾ L. Bieberbach, Berliner Ber. 38 (1916), S. 946, Satz V.

⁶⁾ Vgl. Landau u. Toeplitz, Archiv f. Mathem. u. Physik, 11 (1906), S. 302 bis 307, wo der entsprechende Satz fürs Kreissinnere bewiesen wird. Der Beweis läßt sich auf unsere Abbildungen fast wörtlich übertragen.

⁷⁾ Vgl. Gleichungen (26) und (28).

In dieser Formel ist uns noch die Größe ϱ unbekannt, da uns ja dem Profil nicht gleichzeitig sein „Mittelpunkt“ gegeben ist, Wegen Monotonieeigenschaften der vorkommenden Funktionen bleibt die Ungleichung (21) aber jedenfalls richtig, wenn man den Abstand ϱ des Aufpunktes vom „Mittelpunkt“ durch einen kleineren Wert ersetzt. Es läßt sich nun leicht folgendes zeigen:

Wenn man zur kleinsten konvexen Hülle unseres Profils eine äußere Parallelkurve in der Distanz ϱ zeichnet, so haben alle außerhalb der Parallelkurve liegenden Punkte vom „Mittelpunkt“ des Profils einen Abstand, der größer als ϱ ist. Dazu muß nur bewiesen werden, daß der „Mittelpunkt“ des Profils innerhalb seiner kleinsten konvexen Hülle liegt. Zum Beweise dieser Behauptung gehen wir von der Definition des „Mittelpunktes“ aus. Diese besteht ja darin, daß bei Wahl dieses Punktes der Nullpunkt der ζ -Ebene durch eine Abbildung der Form (11) das Äußere von K_a auf das Äußere unseres Profils abgebildet werden kann. Wir setzen nun

$$z = re^{i\varphi}$$

bilden längs des Kreises K_a das Integral

$$J = \int_0^{2\pi} \zeta(z) d\varphi,$$

verschwindet J . Wenn die Abbildung noch auf dem Rand von K_a regulär ist⁸⁾, folgt das einfach daraus, wenn man in (23) für ζ seine Entwicklung (11) einführt, darin $z = ae^{i\varphi}$ setzt und gliedweise integriert.

Nun kann man aber J in ein Integral längs der Profilkurve umwandeln. Es ist ja offenbar längs dieser Kurve

$$\left| \frac{d\zeta}{dz} \right| = \frac{|d\zeta|}{a d\varphi}.$$

⁸⁾ Auch wenn die Abbildung am Rande von K_a nicht mehr regulär analytisch ist, hat das Integral J noch einen Sinn, da, wie Caratheodory gezeigt hat, die Funktion $\zeta(z)$ jedenfalls stetige Randwerte besitzt. Da weiter, wie aus der Entwicklung (11) der Funktion $\zeta(z)$ folgt, das Integral

$$J(r) = \int_0^{2\pi} \zeta(re^{i\varphi}) d\varphi$$

für alle $r > a$ verschwindet und wegen der Stetigkeit von $\zeta(z)$ im abgeschlossenen Inneren von K_a

$$\lim_{r \rightarrow a} J(r) = J(a) = J,$$

bleibt die Relation $J=0$ erfüllt. Auch die Definition als „konformer Schwerpunkt“ kann aufrechterhalten bleiben, wenn man als Masse eines Bogenstückes der Profilkurve die Länge des Bildbogens auf K_a annimmt.

Aus dem Verschwinden von J folgt also nach (23) und (24)

$$(25) \quad \int \zeta \left| \frac{dz}{d\zeta} \right| |d\zeta| = 0.$$

Das ist aber ein Integral längs der Profilkurve. Da $|d\zeta|$ das Bogenelement dieser Kurve ist, läßt sich Gleichung (25) offenbar auch folgendermaßen deuten: sie sagt aus, daß der Punkt $\zeta = 0$ der Schwerpunkt einer Massenbelegung ist, die mit der linearen Dichte $\frac{dz}{d\zeta}$ auf der Profilkurve verteilt ist. Da nun $\zeta = 0$ zugleich der „Mittelpunkt“ des Profils ist, läßt sich dieser jetzt auch definieren als der Schwerpunkt einer Massenbelegung auf der Profilkurve, deren lineare Dichte der Abbildungsmodul ist, der sich ergibt, wenn man das Äußere der Profilkurve so auf das Äußere des Kreises K_a abbildet, daß die Abbildung im Unendlichen in die Identität übergeht. Man kann vielleicht diesen Mittelpunkt sinngemäß den „konformen Schwerpunkt“ der Profilkurve nennen.

Der Schwerpunkt einer positiven Massenbelegung auf einer geschlossenen Kurve muß aber jedenfalls im Inneren der kleinsten konvexen Hülle dieser Kurve liegen, also, falls sie selbst konvex wäre, in ihrem eigenen Inneren. Dann muß aber tatsächlich (21) immer gelten, wenn g die Distanz einer Parallelkurve zur kleinsten konvexen Hülle des Profils bedeutet, außerhalb deren der Aufpunkt liegt, dessen Abstand von jedem inneren Punkte des Bereiches dann $> g$ ist.

Wir müssen nun noch für f und F ihre Werte einsetzen. Wenn über die Profilkurve keine weiteren Voraussetzungen gemacht werden, so kann man als Grenzen

$$(26) \quad f(x) = 1 - x^2, \quad F(x) = \frac{1}{1 - x^2}$$

einführen⁹⁾. Setzt man das in (21) ein, so ergibt sich

$$(27) \quad \left(1 - \frac{\beta^2}{g^2}\right)^2 < G < \frac{1 + \frac{\beta^2}{g^2}}{1 - \frac{\beta^2}{g^2}}.$$

Ist die Profilkurve aber konvex, so kann man für den Abbildungsmodul engere Grenzen angeben¹⁰⁾, nämlich

$$(28) \quad f(x) = 1 - x^2, \quad F(x) = 1 + x^2.$$

Diese ergeben, in (21) eingesetzt,

$$(29) \quad \frac{1 - \frac{\beta^2}{g^2}}{1 + \frac{\beta^2}{g^2}} < G < \frac{1 + \frac{\beta^2}{g^2}}{1 - \frac{\beta^2}{g^2}}.$$

⁹⁾ K. Löwner, loc. cit. ⁴⁾, Satz IV und V.

¹⁰⁾ K. Löwner, loc. cit. ⁴⁾, § 3.

Die Ungleichungen (27) und (29) für die Geschwindigkeit G sind offenbar nur so lange gültig, als die Parallelkurve, außerhalb deren der Punkt liegt, einen Abstand von der Profilkurve hat, der größer ist als die Breite des Profils. Denn für $\varrho = \beta$ werden die Grenzen für G Null und ∞ , sagen also gar nichts mehr aus, während für noch kleinere ϱ die zweite Ableitung hinfällig wird.

Die für G angegebenen Grenzen sind keineswegs scharfe Grenzen, vor allem, weil die Ungleichung (18) sehr unscharf ist und es müssen sich hier viel schärfere finden lassen.

Die Ungleichung für konvexe Profile gibt aber immerhin bei einigermaßen weit entferntem Aufpunkt schon numerisch sehr enge Schranken für die Geschwindigkeit. So muß z. B., wenn die Entfernung des Aufpunktes vom Profil größer als die zehnfache Breite desselben ist (also $\varrho = 0,1$), G nur mehr zwischen 0,98 und 1,02 schwanken. Für beliebige Profile ergeben sich unter derselben Annahme die Grenzen 0,90 und 1,02.

Wie schon erwähnt, läßt sich die ganze Abschätzung noch nach einer anderen Methode durchführen, die sogar einfacher ist und noch etwas bessere Schranken ergibt. Wir hatten aus der Lage des Aufpunktes in der ζ -Ebene auf die des entsprechenden Punktes in der z -Ebene mit Hilfe eines Satzes von Bieberbach geschlossen, der in unserer Ungleichung (30) formuliert war.

Man kann sich aber anstatt dessen auch auf den folgenden Satz (Satz 11): Wenn ein Punkt in der z -Ebene außerhalb des Kreises K_a um den Abstand r vom Ursprung hat, so ist bei einer Abbildung der von K_a betrachteten Art der kleinste Abstand δ des Bildpunktes von der Bildkurve von K_a höchstens gleich r . Also:

$$\delta \leq r.$$

Diese Ungleichung tritt an Stelle von (18). Aus (30) folgt in Verbindung mit (19)

$$\frac{a}{r} \leq \frac{\beta}{2\delta}.$$

Es kann also in den Ungleichungen (21), (27) und (29) überall an Stelle von $\frac{\beta}{\varrho}$ gesetzt werden. Die so entstehenden Formeln geben unmittelbar eine Abschätzung für die Geschwindigkeit in einem Punkte der durchströmten Ebene, wenn uns nur der Abstand δ dieses Punktes von dem ihm am nächsten gelegenen Punkte des Profils und dessen

¹¹⁾ K. Löwner, loc. cit. ⁴⁾, Satz VIII.

Breite β gegeben ist. Die Betrachtung des „konformen Schwerpunktes“ ist hier überflüssig.

Wenn wir zur kleinsten konvexen Hülle des Profils eine äußere Parallelkurve im Abstände δ ziehen, so hat sicher jeder außerhalb derselben gelegene Punkt eine Minimdistanz vom Profil, die größer als δ ist. Es gilt also dort die aus (27) in der genannten Art gewonnene Ungleichung.

$$(32) \quad \left(1 - \frac{\beta^2}{4\delta^2}\right)^2 < G < \frac{1 + \frac{\beta^2}{4\delta^2}}{1 - \frac{\beta^2}{4\delta^2}}.$$

Diese Grenzen sind enger als die Grenzen (27). Wenn wir wieder wie oben den Abstand der Parallelkurve als die zehnfache Profilbreite annehmen (also $\frac{\beta}{\delta} = 0,1$), ergeben sich als Grenzen 0,995 und 1,005 für beliebig gestaltete Profile. Wenn das Profil nicht gerade ein konvexes ist, muß natürlich, damit δ größer als die Minimdistanz des Aufpunktes ist, diese nicht außerhalb der Parallelkurve zur konvexen Hülle liegen, sondern nur außerhalb einer Kurve, die man erhält, wenn man von der Parallelkurve zum Profil selbst alle sich selbst durchsetzenden Teile wegläßt.

(Eingegangen am 21. August 1918.)

Über den Begriff „extremale Krümmung“ und eine kennzeichnende Eigenschaft der Ellipse.

Von
Paul Funk in Prag.

I. Problemstellung.

Zu den folgenden Betrachtungen wurde ich durch die Landsbergsche Definition des Begriffes „extremale Krümmung“, einer Verallgemeinerung des Begriffes „geodätische Krümmung“ angeregt¹⁾. Dieser Begriff wird hier folgendermaßen eingeführt. Vorgelegt sei das Variationsproblem in der Weierstraßschen homogenen Form

$$\int F(x, y; x', y') dt = \text{Min},$$

so wie wir im folgenden immer als positiv definit annehmen wollen.

Wir denken uns ferner den Parameter so normiert, daß

$$F(x, y; x', y') = 1$$

und führen einen von t abhängigen ebenen Vektor η mit den Komponenten ξ, η ein durch das Gleichungspaar:

$$F_{x'}\xi + F_{y'}\eta = 0,$$

$$x'\eta - y'\xi = \sqrt{\frac{x'^2}{F_{y'y'}}} = \sqrt{\frac{-x'y'}{F_{x'y'}}} = \sqrt{\frac{y'^2}{F_{x'x'}}}.$$

Unter extremer Krümmung versteht man dann den Ausdruck

$$F_{x'}\xi' + F_{y'}\eta' + F_{x\xi} + F_{y\eta}.$$

Wenn man (3) differenziert, sieht man, daß er sich auch in der Form schreiben läßt

$$\xi \left(F_{xx} - \frac{d}{dt} F_{x'} \right) + \eta \left(F_{yy} - \frac{d}{dt} F_{y'} \right).$$

¹⁾ Vgl. G. Landsberg, Über die Krümmung in der Variationsrechnung, Math. Annalen 65 (1908), S. 313–349.

Wir deuten nun x', y' als kartesische Punktkoordinaten und bezeichnen den Vektor mit den Komponenten x', y' mit ξ . Die Gleichung (2) ist dann die Gleichung der „Indikatrix“, und die Gleichung (3) besagt: Der Vektor η liegt in der Richtung der im Endpunkt von ξ errichteten Tangente an die Indikatrix. Aus der Gleichung (4) folgt, daß der Flächeninhalt des durch ξ und η bestimmten Parallelogramms dem $\frac{1}{\pi}$ -fachen Flächeninhalt derjenigen Ellipse gleich ist, deren Mittelpunkt im Koordinatenursprung der x', y' -Ebene liegt und die im Endpunkte von ξ die Indikatrix dreipunktig berührt. Mit anderen Worten: In bezug auf jene Ellipse ist η der konjugierte Halbmesser zu ξ .

Außer dieser Verallgemeinerung des Begriffes der geodätischen Krümmung kann man aber noch eine andere Art der Verallgemeinerung vornehmen. Der Begriff „geodätische Krümmung“ kann ja folgendermaßen erklärt werden: Sei C eine beliebige Flächenkurve. Man ordnet nun jedem Punkt P von C dadurch einen Punkt P' zu, daß man senkrecht auf C im Punkt P nach einer bestimmten Seite hin eine geodätische Linie zieht und auf ihr einen Punkt P' so einzeichnet, daß die auf ihr gemessene Entfernung PP' immer gleich einer für alle Punkte P konstanten Größe ε wird. Die Punkte P' bilden dann eine „geodätische Parallelkurve“ C' zu C im Abstand ε . Bezeichnet nun $S(\varepsilon)$ die auf C' gemessene Länge zwischen zwei Punkten P'_1 und P'_2 , so ist $\left(\frac{\partial S(\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}$ das Integral der geodätischen Krümmung für das Kurvenstück $P_1 P_2$.

Dividiert man nun diesen Ausdruck durch die auf C gemessene Länge S_0 von $P_1 P_2$, so ist der Grenzwert dieses Quotienten, den man erhält, wenn man P_1 mit P_2 zusammenfallen läßt, die geodätische Krümmung in dem betreffenden Punkt.

Gehen wir nun von dem speziellen Variationsproblem der geodätischen Linie zum allgemeinen Variationsproblem (1) über, so liegt es nahe, den Begriff „senkrecht“ durch den Begriff „transversal“ zu ersetzen, unter dem Wert des vorgegebenen Integrals zu verstehen, wenn man es längs einer zu einer vorgelegten Kurve C nach einer bestimmten Seite hin transversal errichteten Extremale erstreckt, und dann in analoger Weise C' , $S(\varepsilon)$ und S_0 zu erklären.

Auch jetzt erhalten wir wieder einen Ausdruck von der Form (5) bzw. (5a), wobei aber nunmehr ξ und η durch

$$\bar{\xi} = \left(\frac{\partial x}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}, \quad \bar{\eta} = \left(\frac{\partial y}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}$$

zu ersetzen ist.

Diese beiden Größen genügen wieder der Transversalitätsbedingung (3);

Stelle von (4) tritt indessen wegen der veränderten Bedeutung von ε Gleichung

$$2) \quad F(x, y; \xi, \eta) = 1.$$

Es ergibt sich nun naturgemäß die Frage, wann diese beiden Arten, den Begriff „geodätische Krümmung“ zu verallgemeinern, identisch sind.

Elementargeometrisch gefaßt lautet sie mit Rücksicht auf die Bedeutung von (5) und (2a) folgendermaßen. Sei J eine stetig gekrümmte konvexe Kurve, der ein bestimmter Durchlaufungssinn zugeordnet sein möge; O sei ein Punkt im Innern. Zu einem beliebigen Punkt A von J konstruiere man die Ellipse mit dem Mittelpunkt O , die J in A dreipunktig berührt. Man durchlaufe nun die Ellipse in dem durch J angegebenen Sinn bis zum nächsten konjugierten Punkt B . Welcher Bewegung muß J genügen, damit für jeden beliebigen Anfangspunkt A auf der Punkt B wieder auf J liege?

Ändern wir nun den Durchlaufungssinn, so geht OB in den entgegengesetzten Vektor $O\bar{B}$ über. Wenn wir für die beiden Durchlaufungssinne Identität der beiden Verallgemeinerungen des Begriffes „geodätische Krümmung“ fordern, so muß J mit der Kurve J' , die aus J durch Spiegelung an O hervorgeht, identisch sein. Deshalb (und auch sonst — vgl. Hamels „starkes Monodromieaxiom“²⁾) liegt es nahe, bei dieser Aufgabe von vornherein die Annahme hinzuzufügen, O sei Mittelpunkt von J .

Zunächst wollen wir aber einen Hilfssatz beweisen, der wohl auch an sich erwähnenswert ist.

II. Über eine allgemeinere affingometrische Schließungsaufgabe.

Vorgelegt sei eine konvexe geschlossene Kurve J , bei der wir der Einfachheit halber zweimalige Differenzierbarkeit der Koordinaten nach dem Parameter voraussetzen wollen, und der ein gewisser Durchlaufungssinn zugeordnet sein möge. Es sei O ein Punkt im Innern von J . In dem Punkt A_0 von J zeichne man die Tangente zur Kurve in der durch den Durchlaufungssinn angegebenen Richtung und parallel dazu durch den Punkt O in derselben Richtung eine Strecke bis zum Schnittpunkt A_1 mit J . In derselben Weise ordne man dem Punkt A_1 mittels desselben Punktes O wieder einen Punkt A_2 zu usw. Wir fragen nun, bei welchen Kurven gibt es eine ganze Zahl n , so daß für jeden beliebigen Punkt A_0 der Ausgangspunkt A_n mit A_0 übereinstimmt? Wir werden insbesondere

²⁾ S. G. Hamel, Über die Geometrien, in denen die Geraden die kürzesten sind, Inaugural-Dissertation, Göttingen 1901, abgedruckt in den Math. Annalen 57 (1903), S. 231–264

zeigen, daß bei den Kurven der betrachteten Art, die einen Mittelpunkt haben, $n = 4$ sein muß, wenn O der Mittelpunkt ist, während im allgemeineren n beliebig groß werden kann. Bezeichnen wir nun mit r und φ gewöhnliche Polarkoordinaten und mit ϑ den Winkel, den die Tangente der Kurve mit dem Radiusvektor einschließt, wobei der Winkel im Sinne der Drehung vom Radiusvektor zur Tangente gezählt werden möge. Dann sind die allgemeinsten Kurven dieser Art gegeben durch

$$\varphi = u + P(u),$$

$$\vartheta = \frac{2\pi}{n} + P\left(u + \frac{2\pi}{n}\right) - P(u),$$

$$\frac{d \log r}{d \varphi} = \cot(\vartheta).$$

Hierbei bedeutet $P(u)$ eine einmal stetig differenzierbare periodische Funktion mit der Periode 2π .

Die Konvexitätsbedingung

$$\frac{d \vartheta}{d \varphi} \geq -1$$

erweist sich identisch mit

$$\frac{dP(u)}{du} \geq -1.$$

Außerdem besteht die Bedingung

$$(7) \quad 0 < \vartheta < \pi$$

und, weil die Kurven geschlossen sein sollen,

$$\int_0^{2\pi} \cot \vartheta \, d\varphi = 0.$$

Man kann sich in der Tat an Beispielen überzeugen, daß die angegebenen Bedingungen auch für beliebig großes n miteinander verträglich sind. Daß man auf diese Weise auch wirklich alle Kurven der betrachteten Art gewinnt, geht daraus hervor, daß man u. a. insbesondere

$$u = \frac{1}{n} \sum_{v=0}^{n-1} \varphi_v$$

setzen kann, wo φ_v den Winkel, den OA_v mit $\varphi = 0$ einschließt, bedeutet. Insbesondere kommt man für $n = 4$ bei Mittelpunktskurven auf Kurven, wie sie zuerst von Radon³⁾ behandelt wurden.

³⁾ Vgl. H. Radon, Über eine besondere Art ebener konvexer Kurven, Leipziger Berichte 68 (1916), S. 123–128.

Bezeichnen wir nun den Vektor OA_v mit $\mathfrak{x}_v$ und denken wir uns A_0 einen mit der Zeit beweglichen Punkt, so daß OA_0 in der Zeiteinheit vorgegebenen Durchlaufungssinn den Flächeninhalt $\frac{1}{2}$ beschreibt! Also gelte

$$[\mathfrak{x}_0 \mathfrak{x}'_0] = 1,$$

bei der Strich eine Differentiation nach der Zeit bedeutet.

Hieraus folgt

$$\mathfrak{x}''_0 = -\mu \mathfrak{x}_0,$$

μ wegen der Konvexität einen nicht negativen Skalar bedeutet.

Für $\mathfrak{x}_1$ erhalten wir

$$\mathfrak{x}_1 = \lambda_0 \mathfrak{x}'_0,$$

bei λ_0 einen positiven Skalar bedeutet; ebenso ist

$$\mathfrak{x}_2 = \lambda_1 \mathfrak{x}'_1 = \lambda_1 \lambda'_0 \mathfrak{x}'_0 + \lambda_1 \lambda_0 \mathfrak{x}''_0,$$

o ist wegen (9)

$$\mathfrak{x}_2 = \frac{\lambda_1 \lambda'_0}{\lambda_0} \mathfrak{x}_1 - \lambda_1 \lambda_0 \mu \mathfrak{x}_0.$$

Durch vektorielle Multiplikation mit $\mathfrak{x}_0$ erhält man

$$[\mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_0] = \frac{\lambda_1 \lambda'_0}{\lambda_0} [\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_0].$$

Wenn λ_0 keine Konstante ist, so muß es im Periodizitätsintervall ein Maximum und ein Minimum geben, jedenfalls gibt es mindestens zwei Stellen von λ'_0 und somit von $[\mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_0]$. Mit Berücksichtigung der Ungleichung (7) folgt, daß für diese Zeitpunkte

$$\sphericalangle A_2 O A_0 = \pi$$

Hieraus schließen wir weiter: Bei Kurven, die O zum Mittelpunkt haben, muß mindestens zweimal A_1 mit A_0 zusammenfallen. Wenn also in solchen Kurven A_n für jeden beliebigen Ausgangspunkt A_0 mit A_0 zusammenfallen soll, so muß $n = 4$ sein; ferner muß dann stets $[\mathfrak{x}_0, \mathfrak{x}_2] = 0$ und λ_0 eine Konstante⁴⁾ sein und, weil O der Mittelpunkt von J ist, muß

$$\mathfrak{x}_2 = -\mathfrak{x}_0$$

zusammenfallen. Der Beweis, daß bei Kurven mit O als Mittelpunkt $n = 4$ ist, läßt sich übrigens auch leicht geometrisch ohne Voraussetzungen über

⁴⁾ Sie bedeutet, wie aus (8) und (10) folgt, den Flächeninhalt des von $\mathfrak{x}_0$ und $\mathfrak{x}_1$ gebildeten Parallelogramms. — Auf diese Eigenschaft der Radonschen Kurven hat sich gelegentlich schon früher einmal Herr A. Winternitz aufmerksam gemacht, damals auch die hier benutzte analytische Darstellung anwandte.

Differenzierbarkeit führen, wenn man von der Betrachtung des kleinsten der Kurve J umgeschriebenen Parallelogramms ausgeht.

III. Erledigung der in I gestellten Aufgabe.

Denken wir uns wieder eine Kurve J mit O als Mittelpunkt sowie die J in dem Punkte A dreipunktig berührende Ellipse mit O als Mittelpunkt gezeichnet und verfolgen wir sie entsprechend einem auf J vorgegebenen Durchlaufungssinn bis zu einem Punkt B , wo der konjugierte Durchmesser schneidet. Bezeichnen wir OB mit η , so ergibt sich

$$\eta = \sqrt{\frac{1}{\mu}} \cdot \xi_0'^5).$$

Wenn η mit ξ_1 identisch sein soll, so muß

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{1}{\mu}}$$

ausfallen. Da wir es nun hier mit einem besonderen Fall der am Schluß von II betrachteten Kurven zu tun haben und somit λ_0 eine Konstante ist, so muß auch μ in diesem Fall eine Konstante sein; dann folgt aber sofort aus (9), daß J eine Ellipse sein muß.

⁵⁾ Im Anschluß an diese Gleichung sei erwähnt, daß ξ und η in gleichen Zeiten gleiche Flächeninhalte beschreiben.

(Eingegangen am 7. September 1918.)

Über eine Interpolationsformel von de la Vallée Poussin.

Von

Maria Theis in Bonn.

In der vorliegenden Arbeit werden die allgemeinen Sätze über Interpolationsverfahren, die in einer von H. Hahn kürzlich veröffentlichten Abhandlung „Über das Interpolationsproblem“¹⁾ bewiesen worden sind, auf eine spezielle von Ch. J. de la Vallée Poussin²⁾ aufgestellte Interpolationsformel angewandt. Diese Formel konvergiert, wie de la Vallée Poussin gezeigt hat, für jede stetige Funktion in jedem Punkte, in dem die Funktion von endlicher Variation ist. Aus den von H. Hahn aufgestellten allgemeinen Sätzen ergibt sich diese Tatsache mit großer Leichtigkeit; außerdem läßt sich auf diese Weise zeigen, daß die de la Vallée Poussinsche Formel nicht für jede stetige Funktion konvergiert. Sodann wird aus dieser Formel eine Interpolationsformel abgeleitet, die der Fourierschen Summierung der Fourierschen Reihe in derselben Weise entspricht, wie die de la Vallée Poussinsche Formel den einfachen Partialsummen der Fourierschen Reihe. Für die so gewonnene Formel wird, wieder unter Benutzung der Resultate von H. Hahn, der Nachweis der Konvergenz für alle stetigen Funktionen erbracht.

§ 1.

Bezüglich der Definition eines stetigen, distributiven Interpolationsverfahrens berufen wir uns auf die schon oben erwähnte Arbeit von H. Hahn³⁾. Die Bezeichnungsweise ist dieselbe wie dort. Die n -te Interpolationsfunktion eines stetigen distributiven Interpolationsverfahrens ist von der Form:

$$P^{(n)}(x; f) = \sum_{\langle a, b \rangle} f(x_i^{(n)}) \varphi_i^{(n)}(x);$$

¹⁾ Mathematische Zeitschrift, Bd. 1 (1918), S. 115–142.

²⁾ Bulletins de l'Académie Belgique, Classe des Sciences 1908, S. 319–410.

³⁾ Loc. cit.¹⁾ S. 117–118.

hierin bezeichnen die $x_i^{(n)}$ die bei der n -ten Näherungsfunktion zur Interpolation benutzten Punkte des Interpolationsintervalles $< a, b >$; über sie wird die Summe erstreckt, $f(x)$ ist die zu interpolierende Funktion.

Mit H. Hahn nennen wir ein solches Verfahren konvergent im Punkte $\bar{x}$, wenn die Beziehung besteht:

$$\lim_{n=\infty} P^{(n)}(\bar{x}; f) = f(\bar{x}).$$

Unsere Ausführungen stützen sich auf die folgenden Sätze⁴⁾:

Satz I: Damit für jede im Punkte $\bar{x}$ von (a, b) stetige, in $< a, b >$ geschränkte und nur von erster Art⁵⁾ unstetige Funktion $f(x)$ die Beziehung gelte:

$$\lim_{n=\infty} P^{(n)}(\bar{x}; f) = f(\bar{x}),$$

ist notwendig und hinreichend, daß folgende Bedingungen erfüllt seien:

1. Für jedes den Punkt $\bar{x}$ enthaltende Intervall (α, β) ist:

$$\lim_{n=\infty} \sum_{< \alpha, \beta >} \varphi_i^{(n)}(\bar{x}) = 1, \quad \lim_{n=\infty} \sum_{(\alpha, \beta)} \varphi_i^{(n)}(\bar{x}) = 1.$$

2. Es gibt eine Zahl A , so daß:

$$\sum_{< \alpha, b >} |\varphi_i^{(n)}(\bar{x})| < A \quad \text{für alle } n.$$

Satz II: Es genüge das stetige, distributive Interpolationsverfahren:

$$P^{(n)}(x; f) = \sum_{< a, b >} f(x_i^{(n)}) \varphi_i^{(n)}(x)$$

folgenden Bedingungen:

1. Bezeichnet $\psi_i^{(n)}(x, h)$ den Wert 0 oder den Wert $\varphi_i^{(n)}(x)$, je nachdem $x_i^{(n)}$ ins Intervall $(x - h, x + h)$ fällt oder nicht, so gelten für jedes $h > 0$ und jedes Intervall $< \alpha, \beta >$ die beiden Beziehungen:

$$\lim_{n=\infty} \sum_{< \alpha, \beta >} \psi_i^{(n)}(x, h) = 0, \quad \lim_{n=\infty} \sum_{(\alpha, \beta)} \psi_i^{(n)}(x, h) = 0$$

gleichmäßig in $< a', b' >$ [Teilintervall von (a, b)].

2. Für jedes $h > 0$ gilt die Beziehung:

$$\lim_{n=\infty} \sum_{(x-h, x+h)} \varphi_i^{(n)}(x) = 1$$

gleichmäßig in $< a', b' >$.

⁴⁾ H. Hahn, loc. cit.¹⁾ S. 126, 129, 137.

⁵⁾ $f(x)$ hat im Punkte ξ eine Unstetigkeit erster Art, wenn die rechtsseitigen und linksseitigen Grenzwerte $f(\xi + 0)$ und $f(\xi - 0)$ existieren.

3. Es gibt eine Zahl A , so daß:

$$\sum_{\langle a, b \rangle} |\varphi_i^{(n)}(x)| < A$$

alle n und alle x von $\langle a', b' \rangle$. Dann gilt für jede in $\langle a, b \rangle$ beschränkte und nur von erster Art unstetige Funktion $f(x)$, die in allen Punkten von $\langle a', b' \rangle$ stetig ist, die Beziehung:

$$\lim_{n=\infty} P^{(n)}(x; f) = f(x)$$

gleichmäßig in $\langle a', b' \rangle$.

Satz III: Damit für jede im Punkte $\bar{x}$ von (a, b) stetige Funktion f , die in $\langle a, b \rangle$ von endlicher Variation ist, die Beziehung gelte:

$$\lim_{n=\infty} P^{(n)}(\bar{x}; f) = f(\bar{x}),$$

hinreichend, daß folgende zwei Bedingungen erfüllt seien:

1. Für jedes den Punkt $\bar{x}$ enthaltende Intervall (α, β) ist:

$$\lim_{n=\infty} \sum_{\langle \alpha, \beta \rangle} \varphi_i^{(n)}(\bar{x}) = 1; \quad \lim_{n=\infty} \sum_{(\alpha, \beta)} \varphi_i^{(n)}(\bar{x}) = 1.$$

2. Es gibt eine Zahl A , so daß für alle Intervalle (α, β) und alle $\bar{x}$ gilt:

$$\left| \sum_{\langle \alpha, \beta \rangle} \varphi_i^{(n)}(\bar{x}) \right| < A.$$

Für unsere Zwecke müssen wir die Sätze II und III etwas umändern. Wir stellen deshalb noch folgende weiteren Sätze auf.

Satz IIa: Für jede in $\langle a, b \rangle$ beschränkte, nur von erster Art unstetige Funktion $f(x)$, die in $\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle$ [Teilintervall von $\langle a, b \rangle$] von endlicher Variation und in $\langle a', b' \rangle$ [Teilintervall von $(\bar{a}, \bar{b})$] stetig ist⁶⁾, gilt die Beziehung:

$$\lim_{n=\infty} P^{(n)}(x; f) = f(x)$$

gleichmäßig für alle x von $\langle a', b' \rangle$, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. Bezeichnet man mit $\psi_i^{(n)}(x, h)$ den Wert 0 oder den Wert $\varphi_i^{(n)}(x)$, nachdem $x_i^{(n)}$ in das Intervall $(x - h, x + h)$ fällt oder nicht, so gelten für jedes $h > 0$ und jedes Intervall (α, β) die beiden Beziehungen:

$$\lim_{n=\infty} \sum_{\langle \alpha, \beta \rangle} \psi_i^{(n)}(x, h) = 0, \quad (2) \quad \lim_{n=\infty} \sum_{(\alpha, \beta)} \psi_i^{(n)}(x, h) = 0$$

gleichmäßig in $\langle a', b' \rangle$.

⁶⁾ An den Stellen a' und b' wird volle, nicht nur einseitige Stetigkeit verlangt.

2. Für jedes $h > 0$ gilt die Beziehung:

$$(3) \quad \lim_{n=\infty} \sum_{(x-h, x+h)} \varphi_i^{(n)}(x) = 1$$

gleichmäßig in $\langle a', b' \rangle$.

3. Es gibt eine Zahl A , so daß für jedes Intervall (α, β) :

$$(4) \quad \left| \sum_{\langle \alpha, \beta \rangle} \varphi_i^{(n)}(x) \right| < A$$

für alle n und alle x von $\langle a', b' \rangle$.

4. Zu jedem $h > 0$ gehört eine Zahl M , so daß:

$$(5) \quad \sum_{\langle a, x-h \rangle} |\varphi_i^{(n)}(x)| + \sum_{\langle x+h, b \rangle} |\varphi_i^{(n)}(x)| < M$$

für alle n und alle x von $\langle a', b' \rangle$.

Satz IIIa: Damit das stetige, distributive Interpolationsverfahren $P^{(n)}(x; f)$ für jede in $\langle a, b \rangle$ geschränkte und nur von erster Art un-
stetige Funktion $f(x)$ konvergent sei im Stetigkeitspunkte $\bar{x}$ von (a, b) ,
in dessen Umgebung $f(x)$ von endlicher Variation ist, ist hinreichend,
daß folgende drei Bedingungen erfüllt seien:

1. Für jedes den Punkt $\bar{x}$ enthaltende Intervall (α, β) gilt:

$$\lim_{n=\infty} \sum_{\langle \alpha, \beta \rangle} \varphi_i^{(n)}(\bar{x}) = 1; \quad \lim_{n=\infty} \sum_{(\alpha, \beta)} \varphi_i^{(n)}(\bar{x}) = 1.$$

2. Es gibt eine Konstante A , so daß für jedes Intervall (α, β) und
alle n :

$$\left| \sum_{\langle \alpha, \beta \rangle} \varphi_i^{(n)}(\bar{x}) \right| < A.$$

3. Zu jedem $h > 0$ gibt es eine Konstante M , so daß:

$$\sum_{\langle a, \bar{x}-h \rangle} |\varphi_i^{(n)}(\bar{x})| + \sum_{\langle \bar{x}+h, b \rangle} |\varphi_i^{(n)}(\bar{x})| < M \quad \text{für alle } n.$$

Es sind in diesen beiden Sätzen die Bedingungen weniger scharf,
als in den entsprechenden Sätzen II und I; dies wird durch eine neu
hinzutretende Voraussetzung ausgeglichen. Der Beweis dieser Sätze unter-
bleibt hier, weil er sich nicht wesentlich von demjenigen unterscheidet,
der von H. Hahn für Satz II und III ausführlich gebracht worden ist²⁾.

²⁾ Loc. cit.¹⁾ S. 123, 135.

§ 2.

Die n -te Näherungsfunktion des Interpolationsverfahrens von de la Vallée Poussin lautet, wenn wir uns der in § 1 eingeführten Bezeichnungsweise bedienen:

$$P^{(n)}(x; f) = \frac{\sin nx}{n} \sum_{< a, b) \atop x - x_i^{(n)}} \frac{(-1)^i}{x - x_i^{(n)}} f(x_i^{(n)}) = \sum_{< a, b)} f(x_i^{(n)}) \varphi_i^{(n)}(x),$$

in die Punkte $x_i^{(n)}$ durch die Vorschrift:

$$x_i^{(n)} = \frac{i\pi}{n}, \quad a \leq x_i^{(n)} < b \quad (i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

bestimmt werden.

Es ist also hier:

$$\varphi_i^{(n)}(x) = \frac{\sin nx}{n} \frac{(-1)^i}{x - x_i^{(n)}} = \frac{\sin n(x - x_i^{(n)})}{n(x - x_i^{(n)})},$$

unter für $x = x_i^{(n)}$ der Wert 1 zu verstehen ist:

$$\varphi_i^{(n)}(x_i^{(n)}) = 1.$$

Hieraus ergibt sich sofort: fällt x mit einem der Punkte $x_i^{(n)}$, etwa $x_{i_*}^{(n)}$ zusammen, so wird:

$$P^{(n)}(x_{i_*}^{(n)}; f) = f(x_{i_*}^{(n)}),$$

d. h. die n -te Näherungsfunktion ist in den Punkten $x_i^{(n)}$ schon gleich dem Funktionswert von $f(x)$ an der betreffenden Stelle.

Wir wenden uns nun der Frage nach der Konvergenz der de la Vallée Poussinschen Formel zu. Als stetige, distributive Interpolationsformel lassen sich auf sie die Sätze von § 1 anwenden; wir haben also zu untersuchen, inwieweit für sie die in den einzelnen Sätzen über das Interpolationsverfahren gemachten Voraussetzungen zutreffen.

Von de la Vallée Poussin wurde schon auf anderem Wege nachgewiesen⁶⁾:

Satz IV: Für jede nur von erster Art unstetige Funktion konvergiert

$$P^{(n)}(x; f) = \frac{\sin nx}{n} \sum_{< a, b) \atop x - x_i^{(n)}} \frac{(-1)^i}{x - x_i^{(n)}} f(x_i^{(n)})$$

in jedem Punkte $\bar{x}$ von (a, b) gegen $f(\bar{x})$, in dem $f(x)$ stetig und in dessen Umgebung $f(x)$ von endlicher Variation ist. Ist $f(x)$ in ganz $\bar{a}, \bar{b} > [\text{Teilintervall von } < a, b >]$ von endlicher Variation, so ist die Konvergenz eine gleichmäßige in jedem Teilintervall $< a', b' >$ von $(\bar{a}, \bar{b})$, in dem $f(x)$ stetig ist.

⁶⁾ Loc. cit.²⁾ S. 341.

Der Beweis dieses Satzes ergibt sich nun für uns sehr einfach, wenn wir uns auf die Sätze IIa und IIIa in § 1 berufen. Wir werden nachweisen, daß die Relationen (1) bis (5) (Satz IIa) im ganzen Intervall $\langle a, b \rangle$ gleichmäßig gelten; hiermit sind dann die Bedingungen von Satz IIIa von selbst erfüllt.

Bezeichnen wir mit $\psi_i^{(n)}(x, h)$ dieselbe Funktion wie in Satz IIa, so haben wir zunächst zu zeigen: ist (α, β) ein beliebiges Intervall, h eine vorgegebene Zahl > 0 , so gelten die Beziehungen:

$$(9) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\langle \alpha, \beta \rangle} \psi_i^{(n)}(x, h) = 0,$$

$$(10) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{(\alpha, \beta)} \psi_i^{(n)}(x, h) = 0^0)$$

gleichmäßig in ganz $\langle a, b \rangle$.

In der Tat, fällt das Intervall $\langle x - h, x + h \rangle$ ganz in $\langle \alpha, \beta \rangle$ hinein, so gilt wegen (8) und der Definition von $\psi_i^{(n)}(x, h)$:

$$\left| \sum_{\langle \alpha, \beta \rangle} \psi_i^{(n)}(x, h) \right| \leq \left| \frac{\sin nx}{n} \sum_{\langle \alpha, x-h \rangle} \frac{(-1)^i}{x-x_i^{(n)}} \right| + \left| \frac{\sin nx}{n} \sum_{\langle x+h, \beta \rangle} \frac{(-1)^i}{x-x_i^{(n)}} \right|;$$

$\frac{\sin nx}{n} \sum_{\langle x+h, \beta \rangle} \frac{(-1)^i}{x-x_i^{(n)}}$ ist aber eine alternierende Reihe, deren Glieder

monoton abnehmen und falls $\beta = +\infty$, gegen Null gehen; sie ist also ihrem absoluten Betrage nach kleiner als ihr erstes Glied, d. h. kleiner als $\frac{1}{nh}$. Dieselbe Abschätzung ergibt sich für die andere Summe. Wir haben daher:

$$(11) \quad \left| \sum_{\langle \alpha, \beta \rangle} \psi_i^{(n)}(x, h) \right| \leq \frac{2}{nh}.$$

Liegt dagegen $\langle x - h, x + h \rangle$ ganz außerhalb $\langle \alpha, \beta \rangle$, so erhalten wir auf ähnliche Weise:

$$(12) \quad \left| \sum_{\langle \alpha, \beta \rangle} \psi_i^{(n)}(x, h) \right| \leq \frac{1}{nh}.$$

Dieselbe Abschätzung läßt sich herleiten, wenn $\langle \alpha, \beta \rangle$ das Intervall $\langle x - h, x + h \rangle$ teilweise überdeckt. Für jedes x von $\langle a, b \rangle$ und jedes Intervall $\langle \alpha, \beta \rangle$ gilt also eine der beiden Beziehungen (11) und (12), womit das gleichmäßige Bestehen von (9) nachgewiesen ist. Entsprechend aber läßt sich (10) beweisen.

Um nachzuweisen, daß die zweite Bedingung von Satz IIa erfüllt ist, haben wir zu zeigen: für jedes $h > 0$ gilt die Beziehung:

⁹⁾ Diese Relationen gelten auch für $a = -\infty$ und $\beta = +\infty$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin nx}{n} \sum_{x-h, x+h} \frac{(-1)^i}{x - x_i^{(n)}} = 1$$

ähnlich in $\langle a, b \rangle$.

Der Beweis ergibt sich mit Hilfe der Partialbruchzerlegung von $\frac{1}{\sin nx}$. Bekanntlich ist:

$$\frac{1}{\sin nx} = \frac{1}{nx} + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} (-1)^i \left\{ \frac{1}{nx - i\pi} + \frac{1}{i\pi} \right\},$$

in der Summe das Glied $i=0$ wegzulassen ist.

Wir behaupten:

$$\frac{1}{\sin nx} = \sum_{(x-h, x+h)} \frac{(-1)^i}{nx - i\pi} + \sum_{\langle x+h, \infty \rangle} \frac{(-1)^i}{nx - i\pi} + \sum_{\langle x-h, -\infty \rangle} \frac{(-1)^i}{nx - i\pi}^{10)}.$$

In der Tat, da die Zusatzglieder $\frac{1}{i\pi}$ in (14) sich wegheben, ist:

$$\frac{1}{\sin nx} = \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{\langle -p, +p \rangle} \frac{(-1)^i}{nx - i\pi},$$

mit anderen Worten: zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein p^* , so daß für $p > p^*$:

$$\left| \frac{1}{\sin nx} - \sum_{\langle -p, +p \rangle} \frac{(-1)^i}{nx - i\pi} \right| < \varepsilon.$$

sind:

$$\sum_{\langle x+h, +\infty \rangle} \frac{(-1)^i}{nx - i\pi} \quad \text{und} \quad \sum_{\langle x-h, -\infty \rangle} \frac{(-1)^i}{nx - i\pi}$$

verschwindende Reihen, deren Glieder absteigend gegen 0 gehen. Sie sind konvergent, d. h. die rechte Seite von (15) hat einen endlichen Wert. Um ihn zu berechnen, folgern wir aus der Konvergenz der beiden Summen: es gibt ein p^{**} , so daß für alle $p > p^{**}$:

$$\left| \sum_{(p, \infty)} \frac{(-1)^i}{nx - i\pi} \right| < \varepsilon, \quad \left| \sum_{(-p, -\infty)} \frac{(-1)^i}{nx - i\pi} \right| < \varepsilon.$$

Nehmen wir nun $p > p^*$, $p > p^{**}$ und schreiben die rechte Seite von (15) in der Form:

$$\sum_{(x-h, x+h)} \dots + \sum_{\langle x+h, p \rangle} \dots + \sum_{\langle x-h, -p \rangle} \dots + \sum_{(p, \infty)} \dots + \sum_{(-p, -\infty)} \dots,$$

ergibt sich aus (16) und (17) unsere Behauptung unmittelbar.

¹⁰⁾ $\sum_{(a, b)} \frac{(-1)^i}{nx - i\pi}$ bedeutet hier und im folgenden, daß die Summe über alle i zu nehmen ist, für die die Ungleichung: $a < x_i^{(n)} < b$ besteht.

Aus (15) können wir nun weiter schließen:

$$(18) \quad \frac{\sin nx}{n} \sum_{(x-h, x+h)} \frac{(-1)^i}{x-x_i^{(n)}} = 1 - \frac{\sin nx}{n} \sum_{< x+h, \infty)} \frac{(-1)^i}{x-x_i^{(n)}} - \frac{\sin nx}{n} \sum_{< x-h, -\infty)} \frac{(-1)^i}{x-x_i^{(n)}}$$

Wegen (10) gilt nun:

$$(19) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin nx}{n} \sum_{< x+h, \infty)} \frac{(-1)^i}{x-x_i^{(n)}} + \frac{\sin nx}{n} \sum_{< x-h, -\infty)} \frac{(-1)^i}{x-x_i^{(n)}} = 0$$

gleichmäßig in $< a, b >$.

Aus (18) und (19) folgt aber das gleichmäßige Bestehen von (13), das zu beweisen war.

Ferner ist zu zeigen: es gibt eine Zahl A , so daß für jedes Intervall (α, β) :

$$(21) \quad \left| \frac{\sin nx}{n} \sum_{< \alpha, \beta >} \frac{(-1)^i}{x-x_i^{(n)}} \right| < A$$

für alle n und alle x in $< a, b >$.

Sei $x_r^{(n)}$ der erste rechts von x liegende Punkt der Menge $\{x_i^{(n)}\}$ ($i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) und $x_l^{(n)}$ der erste links von x liegende Punkt $x_i^{(n)}$ ¹¹⁾. Setzen wir dann:

$$x_r^{(n)} - x = \xi_r^{(n)}, \quad x - x_l^{(n)} = \xi_l^{(n)},$$

so ergibt sich die Abschätzung:

$$(22) \quad \left| \frac{\sin nx}{n} \sum_{< \alpha, \beta >} \frac{(-1)^i}{x-x_i^{(n)}} \right| \leq \left| \frac{\sin n(x-x_r^{(n)})}{n(x-x_r^{(n)})} \right| + \left| \sin nx \right| \left| \frac{1}{n\xi_r^{(n)} + \pi} - \frac{1}{n\xi_r^{(n)} + 2\pi} + \dots \right|$$

Die Reihe:

$$\frac{1}{n\xi_r^{(n)} + \pi} - \frac{1}{n\xi_r^{(n)} + 2\pi} + \frac{1}{n\xi_r^{(n)} + 3\pi} - \frac{1}{n\xi_r^{(n)} + 4\pi} + \dots$$

ist alternierend und monoton abnehmend, also ihrem absoluten Betrage nach kleiner als der absolute Betrag ihres ersten Gliedes. Für dieses gilt:

$$\left| -\frac{1}{n\xi_r^{(n)} + \pi} \right| \leq \frac{1}{\pi} \quad \text{für alle } n.$$

Daher folgt aus (22):

$$(23) \quad \left| \frac{\sin nx}{n} \sum_{< \alpha, \beta >} \frac{(-1)^i}{x-x_i^{(n)}} \right| \leq 1 + \frac{1}{\pi}$$

für alle n und alle x in $< a, b >$.

¹¹⁾ Ist x selbst ein Punkt von $\{x_i^{(n)}\}$, so setzen wir $x_r^{(n)} = x$; $x_l^{(n)} = x - \frac{\pi}{n}$. Wir führen den Beweis für den Fall, daß x in (α, β) liegt.

Auf dieselbe Weise erhält man:

$$\left| \frac{\sin nx}{n} \sum_{< a, x >} \frac{(-1)^i}{x - x_i^{(n)}} \right| < 1 + \frac{1}{\pi}$$

alle n und alle x in $< a, b >$.

Aus (23) und (24) folgt aber (21) unmittelbar.

Endlich haben wir noch nachzuweisen: ist $h > 0$ beliebig gewählt, gibt es eine Zahl M , so daß:

$$\left| \frac{\sin nx}{n} \sum_{< a, x-h >} \left| \frac{1}{x - x_i^{(n)}} \right| + \left| \frac{\sin nx}{n} \sum_{< x+h, b >} \left| \frac{1}{x - x_i^{(n)}} \right| \right| \leq M$$

alle n und alle x in $< a, b >$.

Da $|\sin nx| \leq 1$, genügt es nachzuweisen, daß:

$$\sum_{< a, x-h >} \left| \frac{1}{n \cdot (x - x_i^{(n)})} \right| + \sum_{< x+h, b >} \left| \frac{1}{n \cdot (x - x_i^{(n)})} \right| \leq M.$$

es Glied dieser Summen ist $\leq \frac{1}{n \cdot h}$. Wegen (7) ist aber die Anzahl

Glieder $\leq \frac{b-a}{\pi} n + 1$ und es ergibt sich die Abschätzung:

$$\sum_{< a, x-h >} \left| \frac{1}{n(x - x_i^{(n)})} \right| + \sum_{< x+h, b >} \left| \frac{1}{n(x - x_i^{(n)})} \right| \leq \frac{b-a}{h\pi} + \frac{1}{h} = M$$

alle n und alle x von $< a, b >$.

Die Formel erfüllt also die vier Bedingungen von Satz IIa für das Intervall $< a, b >$ und Satz IV ist bewiesen.

§ 3.

Wir wollen nun untersuchen, wie sich die Formel von de la Vallée Poussin für beliebige stetige Funktionen verhält. Soll sie für jede ge-
ränkte Funktion, die in $< a, b >$ nur Unstetigkeiten erster Art hat,
jedem Stetigkeitspunkt von (a, b) konvergieren, so muß sie den Be-
dingungen von Satz I (§ 1) in jedem Punkte von (a, b) genügen. Wir
wollen hingegen nachweisen, daß die Formel der Bedingung 2. von
Satz I:

$$\sum_{< a, b >} |\varphi_i^{(n)}(\bar{x})| < A \quad \text{für alle } n$$

keinen Punkt $\bar{x}$ von (a, b) genügt [ausgenommen $\bar{x} = \pm n\pi$].

Sei zunächst $\bar{x}$ eine mit π kommensurable Zahl ($\neq \pm n\pi$):

$$\bar{x} = \frac{p}{q} \pi \quad q \neq 1; \quad p \text{ und } q \text{ teilerfremd,}$$

behaupten wir: es läßt sich stets eine Folge von positiven, ganzen

Zahlen $\{n_\nu\}$ ($\nu = 1, 2, \dots$) so auswählen, daß für jedes Intervall (a, b) das den Punkt $\bar{x}$ enthält, die Beziehung gilt:

$$(26) \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} \left| \frac{\sin n_\nu \bar{x}}{n_\nu} \right| \sum_{< a, b) \left| \frac{1}{\bar{x} - x_i^{(n_\nu)}} \right| = +\infty.$$

Zum Beweise behandeln wir zunächst einen besonders einfachen Fall, indem wir die Annahme machen:

$$(27) \quad \bar{x} = \frac{\pi}{2}; \quad < a, b > = < 0, \pi >.$$

Wir nehmen in diesem Falle für $\{n_\nu\}$ die Folge der ganzen positiven ungeraden Zahlen; dann gilt für jedes n_ν :

$$|\sin n_\nu \bar{x}| = |\sin n_\nu \frac{\pi}{2}| = 1,$$

und es bleibt nur noch $\sum_{< a, b) \left| \frac{1}{n_\nu (\bar{x} - x_i^{(n_\nu)})} \right|$ abzuschätzen. Nun ist:

$$\bar{x} - x_i^{(n_\nu)} = \frac{\pi}{2} - \frac{i\pi}{n_\nu} = \frac{\pi}{2} \frac{n_\nu - 2i}{n_\nu},$$

also:

$$\sum_{< a, b) \left| \frac{1}{n_\nu (\bar{x} - x_i^{(n_\nu)})} \right| = \frac{2}{\pi} \sum_{< a, b) \left| \frac{1}{n_\nu - 2i} \right|,$$

und es gilt:

$$\sum_{< 0, \pi) \left| \frac{1}{n_\nu (\frac{\pi}{2} - x_i^{(n_\nu)})} \right| = \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{n_\nu} + \frac{1}{n_\nu - 2} + \dots + 1 + 1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n_\nu - 2} \right).$$

Diese Summe wächst mit n_ν über alle Grenzen; hiermit ist (26) für den Fall (27) bewiesen.

Ganz analog läßt sich der Beweis für jeden Punkt $\bar{x} = \frac{p}{q}\pi$ von (a, b) führen, p und q sind teilerfremd vorausgesetzt, $q \neq 1$. Wir bestimmen dann die Folge $\{n_\nu\}$ ($\nu = 1, 2, \dots$) durch die Vorschrift: n_1 sei eine beliebige Primzahl, die in q nicht aufgeht; für $\nu > 1$ sei: $n_\nu = n_1^\nu$. Dann ist:

$$\frac{p}{q} n_\nu \neq n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

und daher:

$$|\sin n_\nu \bar{x}| = |\sin (n_\nu \frac{p}{q} \pi)| \geq |\sin \frac{\pi}{q}| = c \quad (c > 0)$$

$$(28) \quad \left| \frac{\sin n_\nu \bar{x}}{n_\nu} \right| \sum_{< a, b) \left| \frac{1}{\bar{x} - x_i^{(n_\nu)}} \right| \geq c \sum_{< a, b) \frac{1}{n_\nu |\bar{x} - x_i^{(n_\nu)}|} = c \frac{1}{\pi} \sum_{< a, b) \frac{1}{|\frac{p}{q} n_\nu - i|};$$

i durchläuft wieder alle ganzen Zahlen, die der Ungleichung genügen:

$$a \leq \frac{i\pi}{n_\nu} < b.$$

erhalten daher für jedes ν :

$$\sum_{< a, b) \left| \frac{p}{q} n_\nu - i \right|} \frac{1}{\left| \frac{p}{q} n_\nu - i \right|} = \frac{1}{\frac{p_\nu}{q} + k_\nu} + \frac{1}{\frac{p_\nu}{q} + k_\nu - 1} + \dots$$

$$+ \frac{1}{\frac{p_\nu}{q}} + \frac{1}{\frac{1-p_\nu}{q}} + \frac{1}{\frac{1-p_\nu}{q} + 1} + \dots + \frac{1}{\frac{1-p_\nu}{q} + k'_\nu},$$

p_ν eine der Zahlen $1, 2, 3, \dots, q-1$ bedeutet und k_ν und k'_ν ganze positive Zahlen sind, die mit ν über alle Grenzen wachsen. (29) konvergiert also mit ν nach ∞ und wegen (28) ist hiermit auch (26) für jedes $\bar{x} = \frac{p}{q}\pi$ ($\bar{x} \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$) bewiesen.

Sei endlich $\bar{x}$ ein beliebiger zu π nicht kommensurabler Punkt von (a, b) . Wir suchen dann die zu einem beliebigen n gehörigen in (a, b) liegenden Punkte $x_i^{(n)}$ auf und bezeichnen den zunächst links von $\bar{x}$ liegenden Punkt $x_i^{(n)}$ mit $x_l^{(n)}$, die rechts von $\bar{x}$ liegenden der Reihe nach mit:

$$x_{r,1}^{(n)}, x_{r,2}^{(n)}, \dots, x_{r,m_n}^{(n)}.$$

Man ergibt sich folgende Abschätzung:

$$\sum_{< a, b) \left| \frac{1}{n(\bar{x} - x_i^{(n)})} \right| \geq \sum_{< \bar{x}, b) \left| \frac{1}{n(\bar{x} - x_i^{(n)})} \right|$$

$$\geq \sum_{k=1}^{m_n} \left| \frac{1}{n(x_l^{(n)} - x_{r,k}^{(n)})} \right| = \frac{1}{\pi} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m_n} \right).$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m_n = +\infty,$$

wegen (30):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{< a, b) \left| \frac{1}{n(\bar{x} - x_i^{(n)})} \right| \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \sum_{\nu=1}^{m_n} \frac{1}{\nu} = +\infty.$$

Andererseits nähert sich, da $\bar{x}$ zu π inkommensurabel ist, die Folge $n\bar{x}$, ($n = 1, 2, \dots$) mit wachsendem n jedem beliebigen Werte zwischen -1 und $+1$, d. h. es gibt eine Teilfolge, deren Grenzwert gleich c ($c > 0$). Daraus und aus (31) folgt:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |\sin n\bar{x}| \sum_{< a, b) \left| \frac{1}{n(\bar{x} - x_i^{(n)})} \right| = +\infty,$$

da auch für alle zu π inkommensurablen Punkte ist (25) nicht erfüllt.

Wir haben also nachgewiesen, daß die Formel von de la Vallée Poussin in keinem Punkte von (a, b) (ausgenommen die Punkte $\pm\pi, \pm 2\pi, \dots$) der Bedingung 2. von Satz I genügt. Es gibt also

eine in $\langle a, b \rangle$ geschränkte, nur von erster Art unstetige, im Punkte x stetige Funktion $f(x)$, für die diese Interpolationsformel nicht konvergiert. Der Beweis von Satz I¹²⁾ zeigt sogar, daß die Funktion $f(x)$ in ganz $\langle a, b \rangle$ stetig gewählt werden kann.

§ 4.

Die Interpolationsformel von de la Vallée Poussin

$$P^{(n)}(x; f) = \frac{\sin nx}{n} \sum_{\langle a, b \rangle} \frac{(-1)^i}{x - x_i^{(n)}} f(x_i^{(n)}),$$

die, wie wir in §§ 2 und 3 gesehen haben, bezüglich der Konvergenz eine weitgehende Analogie mit den Fourierschen Reihen aufweist, hat auch formal mit den Partialsummen dieser Reihen:

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x+u) \frac{\sin(n-\frac{1}{2})u}{\sin \frac{u}{2}} du$$

große Ähnlichkeit. Um eine für jede stetige Funktion konvergente Formel zu erhalten, liegt es daher nahe, von dem von Fejér untersuchten, für jede stetige Funktion mit wachsendem n gegen den Funktionswert $f(x)$ konvergierenden Mittelwert:

$$\frac{s_1(x) + s_2(x) + \dots + s_n(x)}{n} = \frac{1}{2\pi n} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x+u) \left(\frac{\sin n \frac{u}{2}}{\sin \frac{u}{2}} \right)^2 du$$

auszugehen und von ihm in ähnlicher Weise ein Interpolationsverfahren abzuleiten. Wir kommen so zu der Formel:

$$(32) \quad F^{(n)}(x; f) = \frac{\sin^2 nx}{n^2} \sum_{\langle a, b \rangle} \frac{1}{(x - x_i^{(n)})^2} f(x_i^{(n)}),$$

von der wir nachweisen werden, daß sie die gewünschte Eigenschaft besitzt.

Die Bezeichnungsweise in (32) ist dieselbe wie bei der de la Vallée Poussinschen Formel; auch hier seien die Punkte $x_i^{(n)}$ von der Form:

$$(33) \quad x_i^{(n)} = \frac{i\pi}{n} \quad (i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

und die Summe werde erstreckt über alle $x_i^{(n)}$, die in das Intervall $\langle a, b \rangle$ fallen.

¹²⁾ H. Hahn, loc. cit.¹⁾, S. 122.

Man kann auch schreiben:

$$F_i^{(n)}(x; f) = \sum_{< a, b >} \frac{\sin^2 n \left(x - x_i^{(n)} \right)}{n^2 \left(x - x_i^{(n)} \right)^2} f(x_i^{(n)}),$$

erkennt unmittelbar, daß auch bei dieser Formel die Näherungsfunktion $F^{(n)}(x; f)$ an den Stellen $x_i^{(n)}$ ($i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) von $< a, b >$ mit dem Funktionswert übereinstimmt.

§ 5.

Da $F^{(n)}(x; f)$ ein stetiges, distributives Interpolationsverfahren bedingt, können wir uns wieder auf die Sätze von § 1 stützen. Wir werden zunächst zeigen, daß die Formel für jede nur von erster Art ungerade Funktion in jedem Stetigkeitspunkte $\bar{x}$ von (a, b) konvergiert, indem wir nachweisen, daß sie den Bedingungen von Satz I für jeden Punkt x von (a, b) genügt.

Diese Bedingungen lauten für unsere Formel:

1. Ist x ein Punkt von (a, b) , so gelten für jedes den Punkt x enthaltende Intervall (α, β) die beiden Beziehungen:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin^2 n x}{n^2} \sum_{< \alpha, \beta >} \frac{1}{\left(x - x_i^{(n)} \right)^2} = 1; \quad (35) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin^2 n x}{n^2} \sum_{(\alpha, \beta)} \frac{1}{\left(x - x_i^{(n)} \right)^2} = 1.$$

2. Zu jedem x von (a, b) gibt es eine Zahl A , so daß:

$$\frac{\sin^2 n x}{n^2} \sum_{< a, b >} \frac{1}{\left(x - x_i^{(n)} \right)^2} < A \quad \text{für alle } n.$$

Zu den Intervallen $< \alpha, \beta >$ rechnet auch das Intervall $< a, b >$. Daher ist mit (34) zugleich auch Bedingung 2. erfüllt und wir brauchen die Relationen (34) und (35) zu beweisen. Hierzu benutzen wir die Partialbruchzerlegung:

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi x} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x-k)^2}.$$

Es folgt wegen (33):

$$1 = \frac{\sin^2 n x}{n^2} \sum_{(-\infty, +\infty)} \frac{1}{\left(x - x_i^{(n)} \right)^2}.$$

Ist nun:

$$\begin{aligned} & \frac{\sin^2 n x}{n^2} \sum_{(-\infty, +\infty)} \frac{1}{\left(x - x_i^{(n)} \right)^2} = \frac{\sin^2 n x}{n^2} \sum_{< \alpha, \beta >} \frac{1}{\left(x - x_i^{(n)} \right)^2} \\ & + \frac{\sin^2 n x}{n^2} \sum_{(\beta, +\infty)} \frac{1}{\left(x - x_i^{(n)} \right)^2} + \frac{\sin^2 n x}{n^2} \sum_{(-\infty, \alpha)} \frac{1}{\left(x - x_i^{(n)} \right)^2} \end{aligned}$$

und daher wegen (36):

$$(38) \quad 1 = \lim_{n=\infty} \frac{\sin^2 nx}{n^2} \sum_{<\alpha, \beta>} \frac{1}{(x - x_i^{(n)})^2} + \lim_{n=\infty} \frac{\sin^2 nx}{n^2} \sum_{(\beta, +\infty)} \frac{1}{(x - x_i^{(n)})^2} \\ + \lim_{n=\infty} \frac{\sin^2 nx}{n^2} \sum_{(-\infty, \alpha)} \frac{1}{(x - x_i^{(n)})^2}.$$

Ebenso ergibt sich:

$$(39) \quad 1 = \lim_{n=\infty} \frac{\sin^2 nx}{n^2} \sum_{(\alpha, \beta)} \frac{1}{(x - x_i^{(n)})^2} + \lim_{n=\infty} \frac{\sin^2 nx}{n^2} \sum_{<\beta, +\infty)} \frac{1}{(x - x_i^{(n)})^2} \\ + \lim_{n=\infty} \frac{\sin^2 nx}{n^2} \sum_{(-\infty, \alpha)} \frac{1}{(x - x_i^{(n)})^2}$$

(38) und (39) lehren, daß die Gleichungen (34) und (35) erfüllt sind, wenn die vier Grenzwerte:

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sin^2 nx}{n^2} \sum \frac{1}{(x - x_i^{(n)})^2},$$

erstreckt über die Intervalle $(-\infty, \alpha)$, $(\beta, +\infty)$, $(-\infty, \alpha >$ und $<\beta, +\infty)$ für x aus (α, β) gleich Null sind. Führen wir den Beweis etwa für $<\beta, \infty)$, für die andern Intervalle verläuft er ganz analog. Wir haben also zu zeigen:

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{<\beta, \infty)} \frac{1}{(x - x_i^{(n)})^2} = 0.$$

Nun ist, da x in (α, β) liegt, für genügend großes n :

$$\beta - \frac{\pi}{n} - x \geq d > 0$$

und wir erhalten für fast alle n die Abschätzung:

$$\frac{1}{n^2} \sum_{<\beta, +\infty)} \frac{1}{(x - x_i^{(n)})^2} < \frac{1}{n\pi} \int_{\beta - \frac{\pi}{n}}^{\infty} \frac{du}{(x - u)^2} \leq \frac{1}{n\pi} \frac{1}{d},$$

also:

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{<\beta, +\infty)} \frac{1}{(x - x_i^{(n)})^2} = 0.$$

Hiermit sind die Relationen (34) und (35), daher auch Bedingung 2. und unsere obige Behauptung bewiesen.

§ 6.

Um nun noch die Gleichmäßigkeit der Konvergenz nachzuweisen, wenden wir Satz II von § 1 an und zeigen, daß die Formel den Bedingungen desselben für das ganze Intervall (a, b) genügt.

Für die erste Bedingung ist dies der Fall, wenn für jedes $h > 0$ und ε Intervall (α, β) die beiden Beziehungen:

$$\lim_{n=\infty} \left(\frac{\sin^2 nx}{n^2} \sum_{\langle \alpha, x-h \rangle} \frac{1}{(x-x_i^{(n)})^2} + \frac{\sin^2 nx}{n^2} \sum_{\langle x+h, \beta \rangle} \frac{1}{(x-x_i^{(n)})^2} \right) = 0^{13}),$$

$$\lim_{n=\infty} \left(\frac{\sin^2 nx}{n^2} \sum_{\langle \alpha, x-h \rangle} \frac{1}{(x-x_i^{(n)})^2} + \frac{\sin^2 nx}{n^2} \sum_{\langle x+h, \beta \rangle} \frac{1}{(x-x_i^{(n)})^2} \right) = 0$$

ganz (α, b) gleichmäßig gelten.

Da die Summen in (40) nur positive Glieder haben, genügt es zu zeigen, daß die Ausdrücke

$$\frac{\sin^2 nx}{n^2} \sum_{\langle -\infty, x-h \rangle} \frac{1}{(x-x_i^{(n)})^2} \quad \text{und} \quad \frac{\sin^2 nx}{n^2} \sum_{\langle x+h, +\infty \rangle} \frac{1}{(x-x_i^{(n)})^2}$$

gleichmäßig gegen Null konvergieren, denn hieraus folgt es für die Intervalle $\langle \alpha, x-h \rangle$, $\langle x+h, \beta \rangle$, $\langle \alpha, x-h \rangle$ und $\langle x+h, \beta \rangle$ a fortiori.

Führen wir den Nachweis etwa für $\sum_{\langle x+h, \infty \rangle}$, so haben wir zu zeigen:

Für jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein N , so daß für alle $n \geq N$ und alle x von (b) gilt:

$$\frac{\sin^2 nx}{n^2} \sum_{\langle x+h, \infty \rangle} \frac{1}{(x-x_i^{(n)})^2} < \varepsilon.$$

Für alle x und alle n ergibt sich, da $\frac{1}{(x-x_i^{(n)})^2}$ monoton abnimmt, die Abschätzung:

$$\frac{\pi}{n} \sum_{\langle x+h, \infty \rangle} \frac{1}{(x-x_i^{(n)})^2} < \int_{x+h}^{\infty} \frac{du}{(x-u)^2} + \frac{1}{h^2} \frac{\pi}{n} \leq \frac{1}{h} + \frac{\pi}{h^2} = A$$

daher ist:

$$\frac{\sin^2 nx}{n^2} \sum_{\langle x+h, \infty \rangle} \frac{1}{(x-x_i^{(n)})^2} < \frac{1}{\pi n} A$$

für alle n und alle x . Hieraus folgt für alle x und alle $n > \frac{\varepsilon \pi}{A}$:

$$\frac{\sin^2 nx}{n^2} \sum_{\langle x+h, \infty \rangle} \frac{1}{(x-x_i^{(n)})^2} < \varepsilon,$$

zu beweisen war. Ebenso läßt sich der Beweis für $\sum_{\langle -\infty, x-h \rangle}$ führen.

Um zu zeigen, daß die zweite Bedingung von Satz II in ganz (α, b) erfüllt ist, benutzen wir folgende Zerlegung:

¹³⁾ Ist $x-h < \alpha$, so fällt die erste Summe weg, ist $x+h > \beta$, so die zweite, selbst gilt für die folgende Gleichung.

$$\frac{\sin^2 nx}{n^2} \sum_{(x-h, x+h)} \frac{1}{(x-x_i^{(n)})^2} = \frac{\sin^2 nx}{n^2} \sum_{(-\infty, +\infty)} \frac{1}{(x-x_i^{(n)})^2} \\ - \frac{\sin^2 nx}{n^2} \sum_{(-\infty, x-h)} \frac{1}{(x-x_i^{(n)})^2} - \frac{\sin^2 nx}{n^2} \sum_{(x+h, \infty)} \frac{1}{(x-x_i^{(n)})^2}.$$

Nach (36) ist der erste Ausdruck rechts für alle x und alle n gleich 1 für den zweiten und dritten Ausdruck aber ist die gleichmäßige Konvergenz gegen 0 soeben nachgewiesen worden.

Es bleibt also nur noch zu zeigen, daß die Formel der Bedingung 3. genügt: es gibt eine Zahl A , so daß:

$$\frac{\sin^2 nx}{n^2} \sum_{<a, b>} \frac{1}{(x-x_i^{(n)})^2} < A$$

für alle n und alle x von $<a, b>$. Dies ergibt sich sehr einfach, wenn wir die Gleichungen (36) und (37) für das Intervall $<a, b>$ ansetzen. In der Tat, da die Summen in (37) nur positive Glieder haben, ist, wegen (36) jede der drei rechtsstehenden Summen, insbesondere:

$$(41) \quad \frac{\sin^2 nx}{n^2} \sum_{<a, b>} \frac{1}{(x-x_i^{(n)})^2} \leq 1$$

für alle x und alle n .

Fassen wir die Ergebnisse von §§ 5 und 6 zusammen, so können wir also den Satz aussprechen:

Satz V: Ist $f(x)$ eine in $<a, b>$ geschränkte nur von erster Art unstetige Funktion, so konvergiert die Interpolationsformel:

$$F^{(n)}(x; f) = \frac{\sin^2 nx}{n^2} \sum_{<a, b>} \frac{1}{(x-x_i^{(n)})^2} f(x_i^{(n)})$$

in jedem Punkte $\bar{x}$ von (a, b) , in dem $f(x)$ stetig ist, gegen den Funktionswert $f(\bar{x})$. Diese Konvergenz ist in dem Teilintervall $<a', b'>$ von (a, b) gleichmäßig, wenn $f(x)$ in allen Punkten von $<a', b'>$ stetig ist.

§ 7.

Wir wollen nun untersuchen, wie sich die Formel in einem Unstetigkeitspunkte erster Art von (a, b) verhält¹⁴⁾. Sei also $\bar{x}$ ein Punkt von (a, b) , für den die beiden Grenzwerte $f(\bar{x} + 0)$ und $f(\bar{x} - 0)$ existieren, aber $f(\bar{x} - 0) \neq f(\bar{x} + 0)$ ist. Zunächst behandeln wir den Fall, daß $\bar{x}$ zu π inkommensurabel, also von allen $x_i^{(n)}$ ($n = 1, 2, \dots$) verschieden ist. Wir schreiben dann $F^{(n)}(\bar{x}; f)$ in der Form:

¹⁴⁾ Eine ähnliche Untersuchung findet sich bei de la Vallée Poussin für die Formel (6). Vgl. loc. cit.²⁾ S. 347.

$$F^{(n)}(\bar{x}; f) = \frac{\sin^2 n \bar{x}}{n^2} \sum_{\langle \alpha, \bar{x} \rangle} \frac{1}{(\bar{x} - x_i^{(n)})^2} f(x_i^{(n)}) + \frac{\sin^2 n \bar{x}}{n^2} \sum_{\langle \bar{x}, b \rangle} \frac{1}{(\bar{x} - x_i^{(n)})^2} f(x_i^{(n)}) \\ = S_1(\bar{x}, n) + S_2(\bar{x}, n)$$

zerlegen $S_2(\bar{x}, n)$ wieder in:

$$S_2(\bar{x}, n) = \frac{\sin^2 n \bar{x}}{n^2} f(\bar{x} + 0) \sum_{\langle \bar{x}, b \rangle} \frac{1}{(\bar{x} - x_i^{(n)})^2} \\ + \frac{\sin^2 n \bar{x}}{n^2} \sum_{\langle \bar{x}, b \rangle} \frac{1}{(\bar{x} - x_i^{(n)})^2} [f(x_i^{(n)}) - f(\bar{x} + 0)] = S_2'(\bar{x}, n) + S_2''(\bar{x}, n).$$

Definieren wir nun die Funktion $g(x)$ durch die Vorschrift:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) - f(\bar{x} + 0) & \text{für } x > \bar{x}, \\ 0 & \text{,, } x \leq \bar{x}, \end{cases}$$

gilt für jedes $\alpha < \bar{x}$:

$$S_2''(\bar{x}, n) = \frac{\sin^2 n \bar{x}}{n^2} \sum_{\langle \alpha, b \rangle} \frac{1}{(\bar{x} - x_i^{(n)})^2} g(x_i^{(n)}).$$

Zufolge der Definition ist $g(x)$ eine im Punkte $\bar{x}$ stetige, im übrigen von erster Art unstetige Funktion und es ist:

$$g(\bar{x}) = 0.$$

Anwendung von Satz V erhalten wir daher:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_2''(\bar{x}, n) = g(\bar{x}) = 0.$$

Wendet man für $S_1(\bar{x}, n)$ eine analoge Zerlegung durch, so ergibt sich dieselbe Weise:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_1''(\bar{x}, n) = 0.$$

Beim Grenzübergang $\lim_{n \rightarrow \infty} F^{(n)}(\bar{x}; f)$ kommen also nur die beiden Ausdrücke in Betracht:

$$S_1'(\bar{x}, n) = \frac{\sin^2 n \bar{x}}{n^2} \sum_{\langle \alpha, \bar{x} \rangle} \frac{1}{(\bar{x} - x_i^{(n)})^2} f(\bar{x} - 0);$$

$$S_2'(\bar{x}, n) = \frac{\sin^2 n \bar{x}}{n^2} \sum_{\langle \bar{x}, b \rangle} \frac{1}{(\bar{x} - x_i^{(n)})^2} f(\bar{x} + 0).$$

Hieraus folgt leicht, daß die Grenzwerte, denen $F^{(n)}(\bar{x}; f)$ mit wachsendem n zustrebt, notwendig zwischen $f(\bar{x} + 0)$ und $f(\bar{x} - 0)$ liegen und gleich diesen Werten sind. Wir können aber auch noch feststellen, daß diese von diesen Werten tatsächlich Grenzwerte sind.

Den zunächst rechts von $\bar{x}$ liegenden Punkt $x_i^{(n)}$ bezeichnen wir mit:

$$x_{i_r}^{(n)} = \frac{i_r \pi}{n}$$

und setzen:

$$(43) \quad \frac{i_r \pi - n \bar{x}}{\pi} = \xi_n,$$

so daß:

$$0 < \xi_n < 1.$$

Bei Benutzung dieser Bezeichnungsweise erhalten wir:

$$(44) \quad S_2'(\bar{x}, n) = \sin^2(\xi_n \pi) \left[\frac{1}{\pi^2 \xi_n^2} + \frac{1}{\pi^2 (\xi_n + 1)^2} + \frac{1}{\pi^2 (\xi_n + 2)^2} + \dots + \frac{1}{\pi^2 (\xi_n + l)^2} \right] f(\bar{x} + 0)$$

wo l eine positive ganze Zahl ist, die mit n über alle Grenzen wächst. Nun gilt für $0 \leq \xi \leq 1$:

$$\sin^2(\pi \xi) \cdot \frac{1}{\pi^2} \left[\frac{1}{\xi^2} + \frac{1}{(\xi + 1)^2} + \dots \right] \leq 1 + \frac{1}{\pi^2} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots \right)$$

d. h. die links auftretende Reihe ist gleichmäßig konvergent für alle ξ aus $< 0, 1 >$. Aus (44) können wir daher weiter schließen: durchläuft n eine solche Folge $\{n_k\}$ ($k = 1, 2, \dots$) mit $\lim_{k \rightarrow \infty} n_k = \infty$, daß:

$$(45) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \xi_{n_k} = \xi, \quad (0 \leq \xi \leq 1)$$

so ist:

$$(46) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} S_2'(\bar{x}, n_k) = \frac{1}{\pi^2} \sin^2(\pi \xi) \left[\frac{1}{\xi^2} + \frac{1}{(\xi + 1)^2} + \frac{1}{(\xi + 2)^2} + \dots \right] f(\bar{x} + 0);$$

$S_1'(\bar{x}, n_k)$ läßt sich entsprechend abschätzen; denn bezeichnet man den ersten links von $\bar{x}$ liegenden Punkt $x_i^{(n)}$ mit $x_{i_l}^{(n)}$, so ist:

$$\frac{n(\bar{x} - x_{i_l}^{(n)})}{\pi} = \frac{n\bar{x} - \pi i_r + \pi}{\pi} = 1 - \xi_n$$

und $S_1'(\bar{x}, n_k)$ geht, wenn (45) gilt, mit wachsendem k gegen:

$$\frac{1}{\pi^2} \sin^2[\pi(1 - \xi)] \left[\frac{1}{(1 - \xi)^2} + \frac{1}{(1 - \xi + 1)^2} + \frac{1}{(1 - \xi + 2)^2} + \dots \right] f(\bar{x} - 0).$$

Hieraus und aus (46) folgt, daß $F^{(n_k)}(\bar{x}; f)$ unter Voraussetzung von (45) gegen den Ausdruck konvergiert:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi^2} \sin^2(\pi \xi) \left[\frac{1}{\xi^2} + \frac{1}{(\xi + 1)^2} + \dots \right] f(\bar{x} + 0) \\ & + \frac{1}{\pi^2} \sin^2(\pi \xi) \left[\frac{1}{(1 - \xi)^2} + \frac{1}{(1 - \xi + 1)^2} + \dots \right] f(\bar{x} - 0) \end{aligned}$$

wenn man die Gleichung beachtet¹⁵⁾:

$$\frac{1}{\xi^2} + \frac{1}{(\xi+1)^2} + \frac{1}{(\xi+2)^2} + \dots = \frac{d^2 \lg \Gamma(\xi)}{d\xi^2} = \chi(\xi),$$

und das weiter:

$$\frac{1}{\pi^2} \sin^2(\pi\xi) [\chi(\xi) f(\bar{x}+0) + \chi(1-\xi) f(\bar{x}-0)].$$

Der Ausdruck wird für $\xi = 0$ gleich $f(\bar{x}+0)$, für $\xi = 1$ gleich $f(\bar{x}-0)$;
läuft also ξ die Werte:

$$0 \leq \xi \leq 1,$$

annimmt er, wegen der Stetigkeit, alle Werte von $f(\bar{x}+0)$ bis $f(\bar{x}-0)$ an.

Da nun nach Voraussetzung $\bar{x}$ mit π nicht kommensurabel ist, kommt wegen (43) mit wachsendem n jedem Werte aus $<0, 1>$ beliebig nahe. Zu jedem ξ ($0 \leq \xi \leq 1$) gibt es also eine Folge $\{\xi_{n_k}\}$, die der Bedingung (45) genügt, und aus unseren letzten Ausführungen können wir schließen:

Satz VI: Ist $\bar{x}$ ein Unstetigkeitspunkt erster Art von $f(x)$, und ist $\bar{x}$ nicht mit π kommensurabel, so kommt $F^{(n)}(\bar{x}; f)$ mit wachsendem n beliebig nahe zu den Werten von $f(\bar{x}+0)$ bis $f(\bar{x}-0)$.

Sei nun $\bar{x}$ ein fester, zu π kommensurabler Punkt:

$$\bar{x} = \frac{p}{q} \pi. \quad (p, q \text{ teilerfremd, } q \neq 0)$$

$n_\nu = \nu \cdot q$ ist dann:

$$F^{(n_\nu)}(\bar{x}; f) = f(\bar{x})$$

daher:

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} F^{(n_\nu)}(\bar{x}; f) = f(\bar{x}).$$

Den ersten Grenzwert erhalten wir also den Funktionswert $f(\bar{x})$.

Wir denken uns nun aus der Folge der ganzen positiven Zahlen alle Vielfachen von q ausgeschlossen. Für die übrigbleibende Folge von Zahlen gilt, wie leicht ersichtlich, die Ausführung, die wir zu Beginn dieses Paragraphen für zu π inkommensurables $\bar{x}$ gemacht haben, nun auch hier, wenn wir n alle positiven ganzen Zahlen durchlaufen, die nicht Vielfache von q sind, so nähert sich $F^{(n)}(\bar{x}; f)$ mit wachsendem n nur den Werten $f(\bar{x}+0)$ und $f(\bar{x}-0)$ und die Grenzwerte sind Ausdrücke der Form (48).

Wir haben noch zu untersuchen, welchen Werten sich ξ_{n_k} in diesem Falle nähern kann. Wegen (49) wird nun:

¹⁵⁾ Enzyklopädie der math. Wissenschaften, Bd. II, I₁, S. 164.

$$\xi_n = \frac{i_r \pi - n \bar{x}}{\pi} = \frac{i_r q - n p}{q},$$

d. h. ξ_n und hiermit auch ξ nimmt nur endlich viele, nämlich $q - 1$ verschiedene Werte an. Es gilt daher der

Satz VII: Ist $\bar{x} = \frac{p}{q} \pi$ (q und p teilerfremd), so strebt $F^{(n)}(\bar{x}; f)$ mit wachsendem n außer dem Funktionswerte $f(\bar{x})$ noch $q - 1$ verschiedenen Grenzwerten zu, die zwischen $f(\bar{x} - 0)$ und $f(\bar{x} + 0)$ liegen.

Für den speziellen Fall $q = 2$ ist $\xi_n = \xi = \frac{1}{2}$ und da wegen (47)

$$\chi(\xi) + \chi(1 - \xi) = \left(\frac{\pi}{\sin \pi \xi} \right)^2$$

gilt:

$$\chi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{2}} \right)^2 = \frac{\pi^2}{2}$$

und (48) erhält den Wert:

$$\frac{1}{2} [f(\bar{x} + 0) + f(\bar{x} - 0)].$$

Mit Rücksicht auf die Sätze VI und VII können wir also sagen: Ist $\bar{x} = 0, \pm \pi, \pm 2\pi, \dots$, so konvergiert $F^{(n)}(\bar{x}; f)$ stets gegen $f(\bar{x})$, denn dann ist $F^{(n)}(\bar{x}, f) = f(\bar{x})$ für alle n . Anderenfalls ist in einem Unstetigkeitspunkte erster Art $\bar{x}$ dann und nur dann $\lim_{n \rightarrow \infty} F^{(n)}(\bar{x}, f) = f(\bar{x})$

wenn $\bar{x} = \pm \frac{\pi}{2}, \pm 3 \frac{\pi}{2}, \dots$ und $f(\bar{x}) = \frac{f(\bar{x} + 0) + f(\bar{x} - 0)}{2}$ ist.

§ 8.

Die Formel $F^{(n)}(x; f)$ hat noch einen anderen Vorzug vor der Formel von de la Vallée Poussin, auf den hier noch kurz aufmerksam gemacht werden soll.

Nach einem von H. Hahn bewiesenen Satze¹⁶⁾ ist ein stetiges distributives Interpolationsverfahren im Punkte $\bar{x}$ von (a, b) dann und nur dann von *endlicher Empfindlichkeit*, wenn für $\bar{x}$ die zweite Bedingung von Satz I (§ 1) erfüllt ist. Wie wir gesehen haben, ist diese Bedingung bei der Formel von de la Vallée Poussin für kein x [ausgenommen $x = 0, \pm \pi, \pm 2\pi, \dots$] erfüllt (vgl. § 3). Für $F^{(n)}(x; f)$ aber ist sie erfüllt, denn nach (41) ist:

$$\frac{\sin^2 nx}{n^2} \sum_{< a, b) } \frac{1}{(x - x_i^{(n)})^2} \leq 1$$

für alle n und alle x .

¹⁶⁾ Loc. cit. ¹⁾, S. 132.

Diese Formel hat also die Empfindlichkeit 1, d. h. ändert man die ¹⁶⁾ um Beträge $\leq \delta$ ab, so wird die Änderung, die dadurch die (x, f) erfahren, an keiner Stelle den Betrag δ übersteigen, während für die von de la Vallée Poussin betrachteten Ausdrücke $P^{(n)}(x, f)$ alle Grenzen wachsen kann.

Zum Schluß sei noch darauf hingewiesen, daß auf ganz analoge Weise, de la Vallée Poussin aus seiner hier behandelten trigonometrischen Formel eine parabolische abgeleitet hat¹⁷⁾, sich auch aus unserer Formel $F(x; f)$ eine parabolische herleiten läßt, die unter denselben Bedingungen $F^{(n)}(x; f)$, insbesondere also für alle stetigen Funktionen konvergiert; an Stelle von $F^{(n)}(x; f)$ tritt dann ein Polynom, das an $2n + 1$ äquidistanten Stellen des Interpolationsintervalles $< a, b >$ mit $f(x)$ übereinstimmt, dessen Grad sich als höchstens $26n$ ergibt.

¹⁷⁾ Loc. cit. ²⁾, S. 394.

(Eingegangen am 11. September 1918.)

Über konforme Abbildung von Bereichen, welche nicht durch alle Rückkehrschnitte zerstückelt werden, auf schlichte Normalbereiche*).

Von.

R. Courant in Göttingen.

(Aus einem Briefe an Herrn Lichtenstein.)

Für schlichtartige, über der Ebene ausgebreitete¹⁾ Bereiche, d. h. Bereiche, welche durch jede in ihnen verlaufende geschlossene Kurve in zwei getrennte Teile zerlegt werden, gilt, wie gleichzeitig durch Koebe und mich bewiesen worden ist²⁾, der Satz, daß sie auf einen Schlitzbereich, d. h. die volle, durch eine endliche bzw. unendliche Anzahl paralleler geradliniger Schlitzte begrenzte Ebene abgebildet werden können. Die bei Hilbert³⁾ ausgesprochene Erweiterung dieses Satzes für nicht schlichtartige Bereiche scheint tiefer gehende Betrachtungen und Ergänzungen zu erfordern, wenn man sie in ihrem vollen Umfange beweisen will. Dagegen läßt sich Ihre Frage nach dem Beweise für den Fall endlichen Geschlechtes des Bereiches leicht beantworten; „vom Geschlecht p “ soll in naheliegen-

*) Während der Korrektur erfahre ich, daß Herr Koebe ebenfalls im Begriffe steht, denselben Gegenstand betreffende Untersuchungen zu publizieren. Indem ich auf diese Arbeit von Herrn Koebe, die in den Göttinger Nachrichten erscheinen wird, hinweise, bemerke ich, daß die hier mitgeteilten Überlegungen auf einen Vortrag zurückgehen, den ich im Sommer 1909 in der Göttinger mathematischen Gesellschaft gehalten habe.

¹⁾ Die folgenden Sätze und Betrachtungen gelten ebenso auch für allgemeine Riemannsche Bereiche, die nicht als über der Ebene ausgebreitet gedacht werden: die Beschränkung auf ebene Bereiche erfolgt hier nur aus dem Grunde der einfacheren Ausdrucksweise.

²⁾ Vgl. P. Koebe, Göttinger Nachrichten 1909, S. 324–361; R. Courant, Inaugural-Dissertation, Göttingen 1910, sowie Math. Annalen 71 (1911), S. 145–183; R. Courant, Journal für Mathematik 144 (1914), S. 190–211.

³⁾ D. Hilbert, Göttinger Nachrichten 1909, S. 314–323. Diese Hilbertsche Note ist der Ausgangspunkt aller neueren Untersuchungen über Schlitzbereiche.

Verallgemeinerung der für algebraische Riemannsche Flächen üblichen
 rucksweise der Bereich dann heißen, wenn man in ihm p , nicht aber
 verschiedene getrennte geschlossene Kurven ziehen kann, ohne
 zu zerstückeln. Für solche Bereiche erhält man, wie ich Ihnen in
 folgenden Zeilen beweisen will, den fraglichen Abbildungssatz durch
 Betrachtungen der Analysis situs; dabei beschränke ich mich der
 Einfachheit der Ausdrucksweise halber auf Bereiche von endlich hohem
 Zusammenhang. Während bei der Abbildung schlichtartiger Bereiche auf
 einer ebenen Schlitzbereich S die sämtlichen Schlitze endlich sind, treten
 bei der Abbildung von nicht schlichtartigen Bereichen auch unendliche
 Schlitze auf, welche paarweise einander zugeordnet sind und den inneren
 Zusammenhang des Bereiches repräsentieren. Um diese allgemeinen Schlitz-
 bereiche zu definieren, betrachten wir die Ebene der rechtwinkligen Koordi-
 naten u, v und schneiden diese zunächst längs eines Paares zur u -Achse
 paralleler von $u = -\infty$ bis zu einem gewissen Werte u_0 reichender gerader
 Linien auf; sodann ordnen wir die Ränder der Schnitte einander in der
 Weise zu, daß auf dem oberen Rand des einen und dem unteren Rand
 des anderen Schnittes Punkte mit demselben
 Werte von u einander entsprechen, d. h. als zu-
 einanderfallend angesehen werden (vgl. Fig. 1)⁴.
 Wir denken wir uns die Ebene längs
 einer oder mehrerer solcher Paare zwischen negativ
 unendlichem u und endlichen Werten von u

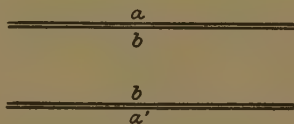


Fig. 1.

in unendlichen Stücken von geraden Linien aufgeschnitten und die Ränder in
 der beschriebenen Weise einander zugeordnet. Sodann stellen wir uns mehrere
 solcher ähnlicher Schnitte vor, wobei indessen längs einer endlichen Strecke
 die Zuordnung eines oberen und eines unteren Randes aufgehoben ist (Fig. 2),
 wobei ferner eine endliche Anzahl von Schlitzpaaren, bei denen die beiden

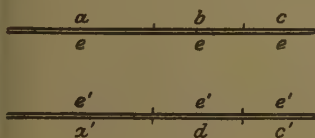


Fig. 2.

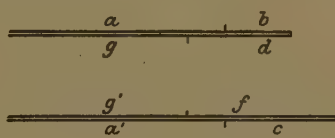


Fig. 3.

den Ränder eines Paares nicht bis zum selben Endwerte von u verlaufen und
 die Ränderzuordnung für die Endstrecken der beiden Ufer in der durch
 Fig. 3 angegebenen Weise aufgehoben ist. Schließlich sei die Ebene noch

⁴) Zur Erläuterung der Figuren sei bemerkt, daß einander zugeordnete Linien
 in den Figuren 1 bis 6 durch gleichartige Buchstaben ($a, a'; b, b'; c, c'$ usw.) be-
 zeichnet sind. Die Schlitze sind überall, außer in Fig. 6, nach links ins Unendliche
 ausgesetzt zu denken.

durch eine Anzahl endlicher von den unendlichen getrennt verlaufender Schlitze parallel zur u -Achse aufgeschnitten. Ein solcher Bereich bzw. jeder Bereich, der aus ihm durch Grenzübergang entsteht, indem Schlitzpaare verschiedener Schlitzpaare ganz oder teilweise zusammenrücken (vgl. Fig. 4, 5, 6), heiße ein allgemeiner Schlitzbereich S_p , wenn die Anzahl der unendlichen Schlitzpaare, deren Ränder zugeordnet sind, $2p$ beträgt.

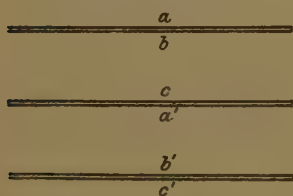


Fig. 4.

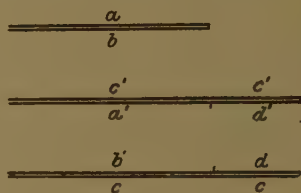


Fig. 5.

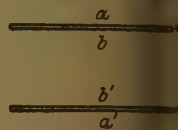


Fig. 6.

Nunmehr lautet der in Frage stehende allgemeine Satz:

Jeder Bereich B von endlich hohem Zusammenhang und dem Geschlecht p läßt sich auf einen allgemeinen Schlitzbereich S_p konform abbilden. Dabei entsprechen den endlichen Schlitzten sowie den Teilen der unendlichen Schlitzte, für welche die Ränderzuordnung aufgehoben ist, Randpunkte von B .

Um die Funktionen, welche die Abbildung eines Bereiches B auf einen Normalschlitzbereich S_p leisten, zu charakterisieren, nehmen wir an, daß der Bereich B über der Ebene der komplexen Variablen $z = x + iy$ ausgebreitet ist, wie der Schlitzbereich über der Ebene der Variablen $\zeta = u + iv$, und daß sich die Funktion ζ im Punkte O des Bereiches B ($z = z_0$) verhält wie $\frac{1}{z - z_0}$. Dann ist die Funktion $\zeta = f(z) = u + iv$, die sogenannte *Strömungsfunktion* für den Punkt O und die vorgegebene Singularität $\frac{1}{z - z_0}$, dadurch charakterisiert, daß ihr Imaginärteil v für jedes zusammenhängende Randstück einen konstanten Randwert annimmt, und daß der Realteil u in B eine eindeutige Funktion des Ortes ist, d. h. beim Umlauf des Ortspunktes um eine geschlossene Kurve in B zum Ausgangswert zurückkehrt. Die Existenz dieser Strmungsfunktionen ist allgemein durch Variationsbetrachtungen von mir bewiesen worden^{a)}.

Die Kurven $v = \text{konst.}$ im Bereiche B sollen als *Strömungskurven*, die Kurven $u = \text{konst.}$ als *Potentialkurven* bezeichnet werden. Sie sind analytische Kurven.

^{a)} Vgl. Hilbert, loc. cit. ²⁾, Koebe und Courant, loc. cit. ²⁾.

^{b)} Vgl. insbesondere Courant, Journal f. Math. 144 (1914), S. 190–211, wo die übrige Literatur zitiert ist.

Zum Beweise des oben formulierten Satzes wollen wir zunächst, um Vorstellung in möglichst einfacher Weise zu fixieren, von Rändern abh. und somit annehmen, daß B eine geschlossene Riemannsche Fläche Geschlecht p sei. Die Ausdehnung des Beweises auf beliebige Bereiche endlichem p wird hernach keine Schwierigkeiten machen.

Der Beweis beruht auf der Betrachtung der Strömungskurven $v = \text{konst.}$ Sie können nicht sämtlich unverzweigt verlaufen, sondern es müssen in B eine Anzahl von „Kreuzungspunkten“⁷⁾ auftreten, das sind Punkte, in denen die Strömungskurven sich verzweigen. Es liegt nahe, diese „Verzweigungskurven“ zur Zerschneidung des Bereiches B heranzuziehen. Die Fortführung dieses Gedankenganges ergibt, wie sich zeigen wird, das gesuchte Resultat.

Ein m -facher Kreuzungspunkt K ist eine m -fache Nullstelle der Abh. $\frac{d\zeta}{dz}$, vorausgesetzt, daß der betreffende Punkt K kein Verzweigungspunkt des Bereiches B ist. Ist K ein n -facher Verzweigungspunkt von B , so führe man $z' = z^{\frac{1}{n}}$ als neue Variable ein; dann ist K ein m -facher Kreuzungspunkt durch das m -fache Verschwinden der Abh. $\frac{d\zeta}{dz'}$, charakterisiert. Bekanntlich laufen in einem m -fachen Kreuzungspunkt $2m + 2$ Kurvenäste der Strömungskurve $v = \text{konst.}$ zusammen. Sie teilen die Umgebung des Punktes K in $2m + 2$ gleichwinklige Sektoren, in denen abwechselnd $v > \text{konst.}$ und $v < \text{konst.}$ ist. Ein mehrfacher Kreuzungspunkt kann als Grenzfall durch Zusammenrücken mehrerer einzelner Kreuzungspunkte gewonnen werden. Vom Kreuzungspunkte aus ausgeht, führen die Kurvenäste der Strömungskurve wegen der Relation $\frac{\partial v}{\partial n}$, unter s die Bogenlänge auf der Strömungskurve, unter n die senkrechte mit geeignetem Richtungssinn versehene Normale verstanden, abwechselnd in Richtung fallender und wachsender Werte von u . Der Verlauf auf der Strömungskurven ebenso wie der Verlauf der Potentialkurven in der Umgebung des Quellpunktes O wird in bekannter Weise⁷⁾ durch eine Schar von Kreisen dargestellt, welche sich sämtlich in O berühren. Jede Strömungskurve, die keinen Kreuzungspunkt enthält, ist infolge des analytischen Charakters eine geschlossene, doppelpunktfreie, durch den Punkt O hindurchlaufende Linie; andernfalls müßte sie nämlich — da sie nirgends endigen kann — eine geschlossene Linie in B sein, längs deren ζ eine reguläre Funktion ist. Wegen der Differentialgleichung $\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial v}{\partial n}$ würde

⁷⁾ Vgl. die Schrift von F. Klein: Über Riemanns Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale, Leipzig 1882, Abschnitt 1.

nun folgen, daß u beim Umlauf des Punktes z um die betrachtete geschlossene Strömungskurve seinen Wert monoton ändert, also im Gegensatz zur Definition keine eindeutige Funktion des Ortes auf B sein kann.

Nunmehr betrachten wir alle Kreuzungspunkte auf B , die notwendig in endlicher Zahl vorhanden sein müssen. Wir machen zunächst die Annahme, daß sie sämtlich einfach sind und daß ferner die durch einen Kreuzungspunkt hindurchgehende Stromlinie keinen weiteren Kreuzungspunkt mehr trifft, eine „einfache Verzweigungslinie“ ist, wie wir sagen wollen. Dann führen von jedem Kreuzungspunkt zwei einander entgegengesetzte Stromlinienäste, vom Kreuzungspunkt aus verfolgt, über monoton abnehmende Werte von u durch negativ unendlich großes u , mithin von derselben Seite, in den Quellpunkt O hinein; denn wegen der monotonen Änderung der eindeutigen Ortsfunktion u können die von dem Kreuzungspunkt ausgehenden Äste der Stromlinie nicht anderweitig miteinander zusammenhängen. Ebenso gelangt man vom Kreuzungspunkte aus, auf den anderen beiden Ästen der Strömungskurve fortschreitend, über positiv unendliches u , mithin von der entgegengesetzten Seite, zum Quellpunkt O .

Wir zerschneiden den Bereich B längs sämtlicher Strömungskurven-äste, die von den Kreuzungspunkten aus über *abnehmendes* u nach dem Punkte O hinführen. Jeder so durch einen Kreuzungspunkt geführte Schnitt stellt einen Rückkehrschnitt des Bereiches B dar, von dem man leicht sieht, daß er B nicht zerstückelt. Die beiden anderen Äste der durch den Kreuzungspunkt hindurchgehenden Strömungskurve, die über monoton *wachsende* Werte von u zum Punkt O hinführen, bilden nämlich ebenfalls eine in B geschlossene Kurve, und diese durchschneidet die erste nur in einem Punkte, dem Kreuzungspunkte; man gelangt also auf ihr, ohne die erste Kurve zu überschreiten, von einer Seite derselben auf die andere. Zur Erläuterung dient die Fig. 1' ⁸⁾.

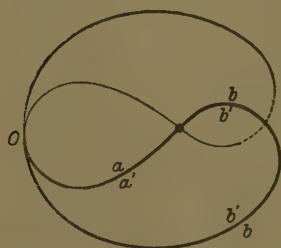


Fig. 1'.

Betrachtungen von selbst — vom Punkte O über positiv unendliche Werte von u ausgehend bis zum Wiedereinmünden in O zurück; hierbei ändert sich

⁸⁾ Die Figuren 1' bis 6' stellen rein im Sinne der Analysis situs den Verlauf der Verzweigungslinien dar; diejenigen Äste, längs deren B zu zerschneiden ist, sind durch dickere Zeichnung von den anderen Ästen hervorgehoben. Ebenso sind die Kreuzungspunkte markiert, während die Stellen, wo sich zwei Äste in der Figur treffen, auf B aber nicht, durch Punktierung des einen Astes an der betreffenden Stelle kenntlich sind.

Wert von u monoton von $+\infty$ bis $-\infty$. Somit wird die betreffende Linie $v=c$ ($c=\text{konst.}$) durch die Strömungsfunktion ζ auf eine nach beiden Seiten hin unbegrenzte Gerade $v=c$ der Ebene der komplexen Variablen $\zeta = u + iv$ abgebildet. Lassen wir den Wert c von $-\infty$ bis $+\infty$ variieren, so bestreicht diese Gerade genau einmal die ganze ζ -Ebene. Die Ränder des zerschnittenen Bereiches B gehen dabei über in die Stücke gewisser dieser Geraden, die nach der Seite der negativen Werte von u ins Unendliche reichen und längs deren die u - v -Ebene aufgeschnitten ist. Gegenüberliegende Punkte der beiden Schnittufer in der u - v -Ebene entsprechen dabei verschiedenen Punkten von B . Den beiden Schnittufern des Rückkehrschnittes auf B entsprechen in der u - v -Ebene verschiedene Werte von v , gegenüberliegenden Punkten der Ufer jedoch wegen der Eindeutigkeit von u dieselben Werte von u . Man erhält daher als Bild der beiden Schnittufer aus B in der u - v -Ebene ein Paar zur reellen Achse symmetrisch verlaufender Schlitze, deren Ränder in der Weise einander zugeordnet sind, wie dies in dem eingangs angegebenen Satze beschrieben wurde und durch die Fig. 1, welche zu Fig. 1' als Korrelat in der ζ -Ebene gehört, dargestellt ist

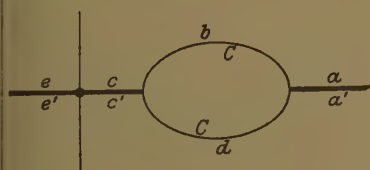


Fig. 2'.

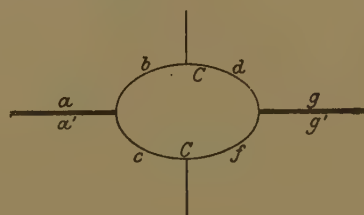


Fig. 3'.

Da der zerschnittene Bereich auf einen in sich zusammenhängenden, wenn auch nur einfach zusammenhängenden schlichten Bereich abgebildet ist, kann die ausgeführte Zerschneidung den Bereich B nicht zerstückeln, die Anzahl der Schlitzpaare muß genau gleich $2p$ sein. Die getrennten Rückkehrschnitte bilden ein kanonisches Schnittsystem⁹⁾.

⁹⁾ Aus der Tatsache, daß die sich ergebende Zerschneidung kanonisch ist, läßt sich eine bemerkenswerte Folgerung über die gegenseitige Lage der Schlitzpaare ableiten. Die unendlichen Schlitzpaare müssen nämlich zu je zweien so angeordnet sein, daß die Schlitze des einen Paares die des anderen trennen. Denn es gehört zu jedem in B geführten Rückkehrschnitt ein konjugierter. Verbindet man in der u - v -Ebene die Endpunkte eines unendlichen Schlitzpaares miteinander durch eine Linie, die bei weiteren Schlitzpaaren trifft, so entspricht dieser Linie in B eine geschlossene Kurve, die von einem Ufer des zum Schlitzpaar zugehörigen Rückkehrschnittes zum anderen Ufer führt, ohne andere der geführten Rückkehrschnitte zu treffen. Das Entsprechende gilt für eine ebenso zu führende Verbindungslinie der Endpunkte des anderen Schlitzpaares, welches zum konjugierten Rückkehrschnitt des oben betrachteten Schlitzpaares gehört.

Um den Beweis des aufgestellten Satzes zu vollenden, haben wir noch die verschiedenen beschränkenden Voraussetzungen, die bisher gemacht worden sind, abzustreifen.

Ist zunächst ein Kreuzungspunkt mehrfach, so bleibt die Betrachtung im wesentlichen dieselbe. Die Zerschneidung des Bereiches B erfolgt längs aller vom Kreuzungspunkt ausgehenden Äste der Strömungslinie, die zu negativ unendlichem u über abnehmende Werte von u hinführen. Ist der Kreuzungspunkt m -fach (siehe Fig. 4' für $m = 2$), so gehören zu ihm in der u - v -Ebene $m + 1$ Schlitzte, die alle parallel der reellen Achse zwischen negativ unendlichem u und einem endlichen Werte u_0 von u verlaufen und deren Ränder einander in der Weise zugeordnet sind, wie dies für $m = 2$ in der Fig. 4 angegeben ist. Wie man sieht, entsteht dieser Fall aus dem zuerst erörterten „allgemeinen“, indem zwei Schlitzpaare verschiedener Schlitzpaare zusammenrücken.

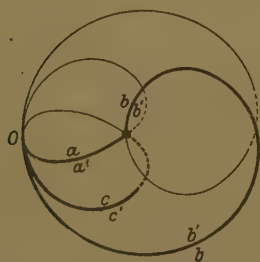


Fig. 4'.

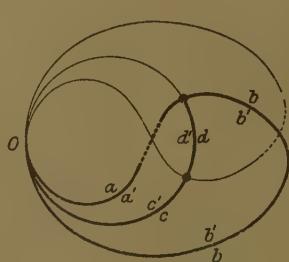


Fig. 5'.

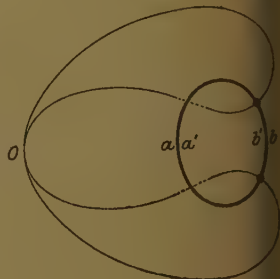


Fig. 6'.

Ähnlich liegen die Verhältnisse, wenn eine Verzweigungslinie mehrfach auftritt, d. h. wenn eine Strömungskurve mehrere Kreuzungspunkte enthält. Die Zerschneidung erfolgt wieder längs aller von Kreuzungspunkten ausgehenden Wege $v = \text{konst.}$, die über monoton abnehmende Werte von u nach O hinführen; der Unterschied gegen den vorigen Fall besteht darin, daß einer dieser Äste auf einen weiteren Kreuzungspunkt trifft, sich dort spaltet und mit den von dort ausgehenden Schnitten zusammen weiter bis zum Punkte O läuft. Demgemäß fallen von den zu den beiden Kreuzungspunkten gehörigen Schlitzpaaren der u - v -Ebene zwei Paare längs eines von negativ unendlichem u aus bis zu einem gewissen Grenzwert von u — dem kleineren der beiden zu den Kreuzungspunkten gehörigen Werte von u — zusammen (vgl. Fig. 5' und 5).

teten gehört. Da nun die beiden geschlossenen Kurven auf B , welche verschiedene Ufer einander konjugierter Rückkehrschnitte verbinden, einander notwendig treffen müssen, so gilt dies auch für die beiden in der u - v -Ebene gezogenen Linien. Hieraus ergibt sich die oben behauptete gegenseitige Lage der Schlitzte.

Schließlich kann auch ein teilweises Zusammenfallen der beiden anderen Teile der beiden Schlitzpaare auftreten — entsprechend der noch bleibenden Möglichkeit, daß durch die beiden Kreuzungspunkte ein geschlossen nicht durch O gehendes Stück einer Stromlinie geht —; in diesem Falle hebt sich die Ränderzuordnung der Schlitz für einen nach $u = -\infty$ gehenden Bereich der Variablen u auf, und wir erhalten in der u - v -Ebene das Bild der Fig. 6, in B das der Fig. 6' ¹⁰⁾.

Wenn endlich der Bereich B Randpunkte enthält, so kann jedes zusammenhängende Randstück zufolge der Grundeigenschaft der Strömungsgleichung als Stück einer Strömungskurve angesehen werden. Es sei C ein solches Randstück, das wir uns der Einfachheit halber als eine geschlossene reelle Linie vorstellen. Im „allgemeinen Falle“ wird dann einfach C einen endlichen Schlitz parallel zur reellen Achse in der u - v -Ebene bilden. Im besonderen kann C die Rolle eines Kreuzungspunktes spielen, d. h. man kann dann nach C auf mehr als zwei Wegen gelangen, wenn man Strömungskurven verfolgt (vgl. Fig. 3').

Da wegen der Konstanz von v auf C beim Umlauf um eine C hindurch eng umschließende Kurve v eindeutig bleiben muß, so muß die Zahl der in C einmündenden Äste von Strömungskurven gerade sein (Fig. 3' für den Fall, daß diese Anzahl gleich 4 ist, was einem durch zwei präsentierten einfachen Kreuzungspunkt entspricht).

In dem geschilderten Fall ist wiederum der Bereich B längs derjenigen, die aus C hervorgehenden Kurvenäste $v = \text{konst.}$ aufzuschneiden, die über C abnehmende Werte von u zum Quellpunkt O hinführen. Die Kurvenäste über die Zerschneidung des Bereiches B bleiben dann gegen den Rand der Ränder unverändert; im Sinne der Analysis situs kann man sich das Randstück C auf einen Punkt zusammengezogen gedacht haben. Z. B. bilden in der Fig. 3' die beiden betrachteten Kurvenäste zusammen mit einem Stück von C einen nicht zerstückenden Querschnitt. Bei der Abbildung auf die u - v -Ebene erhalten wir für das Randstück C und die zugehörigen Schnitte die Abbildung und Ränderzuordnung, wie sie für den typischen Fall der Fig. 3' durch Fig. 3 dargestellt wird. Sie entspricht dem eingangs formulierten allgemeinen Satze. Weiterhin ist beim Auftreten eines Randes die Möglichkeit zu bedenken, daß die zu einem Randstück C gehörige Strömungskurve Kreuzungs-

¹⁰⁾ Eine andere Möglichkeit für den Verlauf einer unter Vermeidung des Quellpunktes in sich zurückführenden Strömungskurve ist, wie man auch direkt erkennt, nicht vorhanden; denn, wie die Bemerkung auf S. 45 zeigt, muß jeder geschlossene Teil einer Stromlinie nicht nur Kreuzungspunkte enthalten, sondern auch in Kreuzungspunkten von anderen Zügen derselben Verzweigungslinie durchsetzt werden, weil sonst dieser geschlossenen Linie sich u im Widerspruch zur Eindeigkeitseigenschaft nicht ändern würde.

punkte im Inneren von B enthält. Die Zerschneidung von B wird dann genau in derselben Weise von den Kreuzungspunkten aus vorgenommen, wie im Falle fehlenden Randes; nur kann dann der Fall eintreten, daß das Randstück C Teil eines der zu führenden Schnitte wird, wobei die beiden Schnittufer um C herum sich trennen. (Vgl. Fig. 2'; als Bild in der u - v -Ebene ergibt sich hier in Übereinstimmung mit dem allgemeinen Satze die Fig. 2.)

Da ein Zusammentreffen dieser beiden Möglichkeiten oder eine Häufung derselben keine neuen Betrachtungen erfordert, so ist der ausgesprochene Satz damit vollständig bewiesen.

Da die Strömungsfunktion durch den Quellpunkt O ($z = z_0$) in B und die polare Singularität $\frac{\alpha}{z - z_0}$, d. h. die Konstante α , bis auf eine komplexe additive Konstante eindeutig bestimmt ist, so ergibt sich aus dem allgemeinen Abbildungssatze das folgende Resultat:

Damit zwei Bereiche B_1 und B_2 vom Geschlecht p derart konform aufeinander abgebildet werden können, daß sich zwei gegebene Punkte und in diesen gegebene Richtungen entsprechen, ist notwendig und hinreichend, daß die zu diesen Bereichen und den gegebenen Punkten als Quellpunkten, den gegebenen Richtungen als Quellrichtungen¹¹⁾ gehörigen Normalschlitzbereiche $S_{1,p}$ und $S_{2,p}$ durch eine Parallelverschiebung und eine Ähnlichkeitstransformation auseinander hervorgehen.

Nennen wir die Anzahl der in sich zusammenhängenden Randstücke des Bereiches B seine *äußere Zusammenhangszahl* q , so hängt, wie man ohne weiteres aus den vorangehenden Entwicklungen erkennt, der zugehörige Schlitzbereich S_p von $6p + 3q$ reellen Konstanten ab, nämlich den Endwerten der Abszissen der unendlichen Schlitzte, den Endpunkten und Längen der endlichen Schlitzte bzw. deren entsprechenden Strecken auf den unendlichen Schlitzufern, und den Ordinaten der $4p$ unendlichen Schlitzte. Es ist also für die Möglichkeit, zwei Bereiche vom Geschlecht p und der Zusammenhangszahl q aufeinander konform abzubilden, so daß zwei vorgegebene Linienelemente ineinander übergehen, die Erfüllung von $6p + 3q - 3$ reellen Bedingungen notwendig und hinreichend (vorausgesetzt, daß nicht zugleich $p = 0$ und $q = 0$ ist). Man erkennt hieraus, in welcher Weise die Abbildung auf Normalschlitzbereiche die klassische Theorie von den Moduln Riemannscher Flächen veranschaulicht¹²⁾.

¹¹⁾ Unter „Richtung der Quelle“ wollen wir das Argument der komplexen Konstanten α verstehen.

¹²⁾ Vgl. Klein, loc. cit. 7), Hilbert, loc. cit. 3).

Der Euklidische Divisionssatz in einem endlichen algebraischen Zahlkörper.

Von

A. Hurwitz in Zürich.

In der elementaren Zahlentheorie pflegt man den Nachweis der Existenz des größten gemeinsamen Teilers zweier ganzen Zahlen auf den euklidischen Divisions-Algorithmus zu gründen, welcher auf dem einfachen Satze beruht, daß jede ganze Zahl a in die Gestalt

$$a = qd + r$$

gebracht werden kann, wobei d eine von Null verschiedene ganze Zahl bedeutet und von den beiden ganzen Zahlen q und r die letztere absolut kleiner als d ist. Diesen „Euklidischen Divisionssatz“ kann man, indem man die Gleichung (1) auf die Form

$$\frac{a}{d} - q = \frac{r}{d}$$

ausgesprochen, auch so aussprechen:

„Ist q eine rationale Zahl, so kann man die ganze Zahl q so wählen, daß die Differenz $q - q$ absolut kleiner als 1 ausfällt.“

In meiner Arbeit „Zur Theorie der algebraischen Zahlen“⁽¹⁾ habe ich die Theorie der Ideale auf die folgende Verallgemeinerung dieses Satzes ausgedehnt:

„Ist q eine Zahl des endlichen algebraischen Zahlkörpers K , so lassen sich die ganzen Zahlen $q_1, q_2, \dots, q_m$ desselben Körpers so bestimmen, daß unter den Normen der Zahlen

$$q - q_1, \quad 2q - q_2, \dots, mq - q_m$$

⁽¹⁾ Nachrichten der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 1895, S. 331. Vgl. auch P. Bachmann, Allgemeine Arithmetik der Zahlkörper, Leipzig 1905, S. 190–195.

mindestens eine absolut genommen kleiner als 1 ist. Dabei bedeutet m eine positive ganze rationale Zahl, die ausschließlich vom Körper K abhängt.

Von der Zahl m darf und soll vorausgesetzt werden, daß sie nicht durch eine kleinere Zahl ersetzt werden kann. Dann ist m eine für den Körper K eindeutig bestimmte, charakteristische Zahl.

A. a. O. habe ich diesen Satz in wenigen Zeilen mit Hilfe des von Dirichlet so häufig verwendeten Schlusses bewiesen, demzufolge bei Verteilung von Objekten in eine Anzahl von Fächern, die kleiner ist als die Anzahl der Objekte, notwendig ein Fach vorhanden sein muß, in welches mehr als ein Objekt hineinkommt. Man kann den Satz aber auch auf Grund des bekannten Minkowskischen Satzes über Linearformen mit ganzzahligen Variabeln beweisen²⁾. Dieser, freilich viel weniger elementare Beweis gibt über den Wert der Zahl m einigen Aufschluß und deshalb möchte ich ihn in den folgenden Zeilen kurz darlegen.

Der Minkowskische Satz läßt sich so formulieren:

Es seien

(3)
$$f_h = a_{h1}x_1 + a_{h2}x_2 + \dots + a_{hn}x_n \quad (h = 1, 2, \dots, n)$$

 $n > 1$ lineare Formen von n Variabeln mit reellen Koeffizienten, deren Determinante

(4)
$$|a_{hk}| = \Delta$$

von Null verschieden ist. Ferner seien $k_1, k_2, \dots, k_n$ n positive Größen, die der Bedingung

(5)
$$k_1 k_2 \dots k_n = \text{abs. } \Delta$$

genügen. Dann kann man den Variablen $x_1, x_2, \dots, x_n$ solche nicht sämtlich verschwindende ganze rationale Werte beilegen, daß die zugehörigen Formenwerte die Bedingungen

(6)
$$|f_1| < k_1, \quad |f_2| < k_2, \quad \dots, \quad |f_n| \leq k_n$$

befriedigen.

Es ist leicht, diesen Satz auf den Fall zu übertragen, wo die Formen (3) nicht sämtlich reell sind, sondern unter ihnen ein oder mehrere Paare konjugiert komplexer Formen vorkommen³⁾. Für diesen Fall lautet der Satz:

²⁾ Es ist bemerkenswert, daß bei dem arithmetischen Beweise des Satzes von Minkowski, den ich in den Nachrichten der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 1897, S. 139–145 gegeben habe, ebenfalls der erwähnte Dirichletsche Schluß Verwendung findet.

³⁾ Vgl. D. Hilbert, „Die Theorie der algebraischen Zahlkörper“, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Berlin 1897, S. 210, Satz 42. Siehe auch E. Landau, „Abschätzungen von Charaktersummen, Einheiten und Klassenzahlen“, Nachrichten der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 1918, S. 14, Anmerkung 31.

Es seien

$$f_1, f_2, \dots, f_r, f_{r+1}, f_{r+2}, \dots, f_{n-1}, f_n$$

Linearformen der Variablen $x_1, x_2, \dots, x_n$ und zwar $f_1, f_2, \dots, f_r$ reellen, während von den übrigen $n - r = 2s > 0$ Formen je zwei nebeneinanderstehende, wie f_{r+1}, f_{r+2} usw. bis f_{n-1}, f_n konjugiert komplex sind. Ferner mögen die positiven Konstanten $k_1, k_2, \dots, k_r, k_{r+1} = k_{r+2}, \dots, k_{n-1} = k_n$ der Bedingung

$$k_1 k_2 \dots k_r k_{r+1} k_{r+2} \dots k_{n-1} k_n = \text{abs. } \Delta$$

genügen, unter Δ die von Null verschieden vorausgesetzte Determinante der Formen (7) verstanden. Dann kann man den Variablen $x_1, x_2, \dots, x_n$ die nicht sämtlich verschwindende ganze rationale Werte beilegen, daß zugehörigen Formenwerte die Bedingungen

$$|f_1| < k_1, |f_2| < k_2, \dots, |f_n| < k_n$$

erfüllen.

Im Falle $r = 0$ kommen natürlich die Formen $f_1, f_2, \dots, f_r$, die Konstanten $k_1, k_2, \dots, k_r$ und die auf sie bezüglichen Ungleichungen (9) in Wegfall.

Es sei nun K ein algebraischer Zahlkörper vom Grade $n > 1$, ferner ϱ eine beliebige Zahl dieses Körpers und $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ eine Basis der Zahlen des Körpers. Ich betrachte dann die folgenden $n + 1$ Linearformen der Variablen $x, x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$\begin{cases} f = x, \\ f_1 = \varrho x + \omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \dots + \omega_n x_n, \\ f_2 = \varrho' x + \omega_1' x_1 + \omega_2' x_2 + \dots + \omega_n' x_n, \\ \vdots \\ f_n = \varrho^{(n-1)} x + \omega_1^{(n-1)} x_1 + \omega_2^{(n-1)} x_2 + \dots + \omega_n^{(n-1)} x_n, \end{cases}$$

wo $\varrho', \dots, \varrho^{(n-1)}$ die zu ϱ konjugierten Linearformen sind.

Die Determinante dieser $n + 1$ Formen hat den Wert

$$\Delta = \sqrt{D},$$

wo D die Grundzahl des Körpers K verstanden.

Nach dem Minkowskischen Satze lassen sich die ganzzahligen rationalen, nicht sämtlich verschwindenden Werte $x, x_1, x_2, \dots, x_n$ so wählen, daß

$$|f| = |x| < \sqrt{|D|}, |f_1| < 1, |f_2| < 1, \dots, |f_n| \leq 1$$

(Sind unter den zu K konjugierten Körpern auch imaginäre vorhanden, so würde die letzte der Ungleichungen (12) durch $|f_n| < 1$ ersetzt werden dürfen.) Ich setze nun

$$q = -(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \dots + \omega_n x_n).$$

Dann wird g eine ganze Zahl des Körpers und die Ungleichungen (12) werden

$$(14) \quad |x| < \sqrt[n]{|D|}, \quad |xq - q| < 1, \quad |xq' - q'| < 1, \dots, |xq^{(n-1)} - q^{(n-1)}| \leq 1,$$

aus denen hervorgeht, daß

$$(15) \quad |N(xq - q)| < 1$$

ist.

Zunächst leuchtet ein, daß die Zahl x nicht Null sein kann und also positiv vorausgesetzt werden darf, da man ohne Störung der Ungleichungen (12) die Zahlen $x, x_1, x_2, \dots, x_n$ durch $-x, -x_1, -x_2, \dots, -x_n$ ersetzen kann. Wäre nämlich $x = 0$, so würde nach (15) die Norm von q verschwinden und also auch $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ sein müssen, während doch $x, x_1, x_2, \dots, x_n$ nicht sämtlich Null sind.

Sodann ergibt die erste Ungleichung (14) unmittelbar den Satz:

Die Grundzahl D eines Körpers vom Grade $n > 1$, d. h. eines beliebigen Körpers, der nicht mit dem Körper der rationalen Zahlen zusammenfällt, ist stets absolut größer als 1. ⁴⁾

Endlich lehrt die Ungleichung (15):

Bezeichnet q eine beliebige Zahl des Körpers K vom Grade $n > 1$ und der Grundzahl D , so läßt sich die natürliche Zahl $g < \sqrt[n]{|D|}$ und die ganze Zahl q des Körpers K so wählen, daß die Norm von $gq - q$ absolut kleiner als 1 ausfällt.

Hiermit ist die Verallgemeinerung des Euklidischen Divisionssatzes aufs neue bewiesen und zugleich gezeigt, daß die in diesem verallgemeinerten Satze oben mit m bezeichnete Zahl kleiner als die Quadratwurzel aus dem absoluten Betrag der Grundzahl des Körpers ist.

Zürich, September 1918.

⁴⁾ H. Minkowski, Über die positiven quadratischen Formen und über Kettenbruchähnliche Algorithmen, Crelles Journal, Bd. 107, 1891, S. 278–297; vgl. auch Gesammelte Abhandlungen, Bd. I (Leipzig und Berlin 1911), S. 243–260.

(Eingegangen am 30. September 1918.)

Zur Analysis der unendlich vielen Variablen.

Zweite Abhandlung.

Reihenentwicklungen nach Eigenfunktionen linearer partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus.

Von

Leon Lichtenstein in Berlin.

In einer vor einigen Jahren erschienenen Abhandlung habe ich gezeigt, sich die Existenz von Eigenwerten gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung aus der Hilbertschen Theorie vollstetiger linearer Formen mit unendlich vielen Variablen ohne Übergang durch Integralgleichungen erschließen läßt¹⁾. Den Betrachtungen jener Arbeit die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx} \left(p \frac{dy}{dx} \right) + qy + \lambda ky = 0$$

bedeutet. In (1) bezeichnet p eine in dem Intervalle $(0, \pi)$ erklärte stetige Funktion, q eine stetige nicht positive, k eine beliebige stetige Funktion. In der erwähnten Arbeit werden im einzelnen folgende Randbedingungen betrachtet.

$$A) \ y(0) = 0, \ y(\pi) = 0; \quad B) \ \frac{dy(0)}{dx} = 0, \ \frac{dy(\pi)}{dx} = 0;$$

$$C) \ y(0) = 0, \ \frac{dy(\pi)}{dx} = 0;$$

$$D) \ \frac{dy(0)}{dx} - \gamma_1 y(0) = 0, \ \frac{dy(\pi)}{dx} + \gamma_2 y(\pi) = 0, \ (\gamma_1 \geq 0, \gamma_2 \geq 0, \gamma_1 + \gamma_2 > 0).$$

¹⁾ Vgl. L. Lichtenstein, Zur Analysis der unendlichvielen Variablen. I. Entwicklungssätze der Theorie gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo 38 (1914), S. 113–166. Die vorliegende Arbeit wird im folgenden als die erste Abhandlung bezeichnet.

Außer der Existenz der Eigenwerte wurde a. a. O. ein weitgehender Entwicklungssatz gewonnen. Für den besonders einfachen Fall der Randbedingungen A) lautet dieser Satz wie folgt:

Es möge $k(x)$ in keinem in $(0, \pi)$ gelegenen Intervall identisch verschwinden, und es sei $f(x)$ irgendeine in $(0, \pi)$ stetige, für $x=0$ und $x=\pi$ verschwindende Funktion, die überdies so beschaffen ist, daß die Reihe

$$(2) \quad \sum_n n^2 \left(\int_0^\pi f(x) \sin nx \, dx \right)^2$$

konvergiert²⁾.

Dann gilt die folgende für $0 \leq x \leq \pi$ gleichmäßig konvergierende Entwicklung

$$(3) \quad f(x) = \sum_\alpha \frac{\lambda_\alpha}{|\lambda_\alpha|} \varphi_\alpha(x) \int_0^\pi k f \varphi_\alpha \, dx,$$

unter λ_α ($\alpha = 1, 2, \dots$) die Eigenwerte, unter $\varphi_\alpha(x)$ die den Beziehungen

$$(4) \quad \int_0^\pi k \varphi_\alpha \varphi_\beta \, dx = 0 \quad (\alpha \neq \beta), \quad \int_0^\pi k \varphi_\alpha^2 \, dx = \frac{\lambda_\alpha}{|\lambda_\alpha|}$$

gemäß normierten Eigenfunktionen verstanden. Es ist ferner

$$(5) \quad \int_0^\pi k f^2 \, dx = \sum_\alpha \frac{\lambda_\alpha}{|\lambda_\alpha|} \left(\int_0^\pi k f \varphi_\alpha \, dx \right)^2.$$

Wie aus den Betrachtungen der vorliegenden Arbeit hervorgeht, gilt ferner die weitere wichtige Entwicklung

$$(6) \quad \int_0^\pi p \left(\frac{df}{dx} \right)^2 \, dx = \sum_\alpha |\lambda_\alpha| \left(\int_0^\pi k f \varphi_\alpha \, dx \right)^2.$$

Diese Untersuchungen werden in der vorliegenden zweiten Abhandlung fortgesetzt. Es handelt sich jetzt um die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung vom elliptischen Typus

$$(7) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(p \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(p \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \lambda k u = 0.$$

Den folgenden Betrachtungen wird ein beschränktes Gebiet T in der Ebene $x-y$, das einfach oder mehrfach zusammenhängend sein kann, zugrunde gelegt. Die Begrenzung S von T soll aus einer endlichen Anzahl

²⁾ Diese Bedingung ist, wie man weiß, der folgenden Bedingung gleichwertig: $f(x)$ hat eine quadratisch integrierbare Ableitung, und es gilt ferner

$$\int_0^\pi \frac{df(x)}{dx} \, dx = f(x).$$

geschlossener analytischer und regulärer Kurven bestehen. Die Funktion p in T und auf S positiv und nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetig, die Funktion k ist nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetig und von beliebigem Vorzeichen. Als Randbedingung wird zunächst (Kapitel I) die Beziehung $u = 0$ auf S betrachtet³⁾.

Die Existenz unendlich vieler Eigenwerte der Differentialgleichung (7) in dem besonderen Falle $p = 1$ zunächst von Herrn M. Mason unter Zuhilfenahme von Variationsbetrachtungen bewiesen worden⁴⁾. Sie folgt, wenn k in $T + S$ längs einer endlichen Anzahl etwa analytischer und regulärer Kurven verschwindet, aus der Hilbertschen Theorie der polaren Integralgleichungen⁵⁾. Weitere Beweise sind in den Untersuchungen von J. Marty⁶⁾, A. Johnson Pell⁷⁾ und E. Garbe⁸⁾ enthalten.

Während in der ersten Abhandlung von den Sätzen der Theorie linearer Differentialgleichungen kein Gebrauch gemacht wird, wird in der vorliegenden Arbeit angenommen, daß die Existenz der Eigenwerte und Eigenfunktionen der Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(p \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(p \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) + \mu \omega = 0,$$

aus der Theorie der linearen Integralgleichungen, bereits feststeht. Die Bestimmung der Eigenwerte der allgemeineren Differentialgleichung (7) wird, wie in der ersten Abhandlung, auf die Untersuchung einer vollständigen quadratischen Form mit unendlich vielen Variablen $K(X, X)$ zurückgeführt. Die Vollständigkeitsrelation und die Entwicklung der Form $K(X, Y)$ nach Eigenformen ergeben, in die Sprache der Theorie linearer Differentialgleichungen übersetzt, bemerkenswerte Sätze, die über die analogen von der Theorie der Integralgleichungen gelieferten Resultate erheblich hinausreichen.

Wir bezeichnen die irgendwie einfach geordneten Eigenwerte der

³⁾ Diese Untersuchungen sollen in einer später erscheinenden dritten Abhandlung fortgesetzt werden.

⁴⁾ Vgl. M. Mason, Sur les solutions satisfaisant à des conditions aux limites données de l'équation différentielle $\Delta u + \lambda A(x, y)u = f(x, y)$, Journal des Mathématiques 1904, S. 445–489.

⁵⁾ D. Hilbert, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, Fünfte Mitteilung, Gött. Nachrichten 1906, S. 439–480 (S. 462–474).

⁶⁾ J. Marty, C. R. 150 (1910), S. 515–518; 603–606; 1031–1033; 1499–1502.

⁷⁾ A. J. Pell, Biorthogonal systems of functions, Transactions of the American Math. Society 12 (1911), S. 135–164; Applications of biorthogonal systems of functions to the theory of integral equations, a. a. O. S. 165–180.

⁸⁾ E. Garbe, Zur Theorie der Integralgleichungen dritter Art, Math. Annalen 76 (1915), S. 527–547.

Differentialgleichung (7) mit λ_α ($\alpha = 1, 2, \dots$). Es seien φ_α die zugehörigen, den Beziehungen

$$(9) \quad \int_T k \varphi_\alpha \varphi_\beta dx dy = 0 \quad (\alpha \neq \beta), \quad \int_T k \varphi_\alpha^2 dx dy = \frac{\lambda_\alpha}{|\lambda_\alpha|}$$

gemäß normierten Eigenfunktionen. Nimmt k in T positive Werte an, so gibt es unendlich viele positive Eigenwerte. Nimmt k in T negative Werte an, so gibt es unendlich viele negative Eigenwerte. Wechselt k in T das Zeichen, so gibt es demnach sowohl unendlich viele positive als auch unendlich viele negative Eigenwerte.

Es sei $\bar{u}(x, y)$ eine in T und auf S stetige, auf S verschwindende Funktion, die beschränkte, in T abteilungsweise stetige partielle Ableitungen erster Ordnung hat.

Es ist

$$(10) \quad \int_T k \bar{u}^2 dx dy = \sum_\alpha \frac{\lambda_\alpha}{|\lambda_\alpha|} \left(\int_T k \bar{u} \varphi_\alpha dx dy \right)^2.$$

Es möge jetzt k höchstens auf einer Menge vom Maße Null in T verschwinden. Diese Bedingung ist z. B. erfüllt, wenn k in T und auf S analytisch und regulär ist.

Es gilt dann die wichtige Formel

$$(11) \quad \int_T p \left\{ \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy = \sum_\alpha |\lambda_\alpha| \left(\int_T k \bar{u} \varphi_\alpha dx dy \right)^2.$$

Es sei g eine in T und auf S stetige, auf S verschwindende Funktion, die beschränkte, in T abteilungsweise stetige partielle Ableitungen erster Ordnung hat, und es sei $G(\xi, \eta; x, y)$ die auf S verschwindende Greensche Funktion der Differentialgleichung

$$(12) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(p \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(p \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) = 0.$$

Jede in der Form

$$(13) \quad U(\xi, \eta) = \int_T G(\xi, \eta; x, y) k(x, y) g(x, y) dx dy$$

darstellbare Funktion läßt sich in eine in T und auf S unbedingt und gleichmäßig konvergierende Reihe

$$(14) \quad U(\xi, \eta) = \sum_\alpha \frac{\lambda_\alpha}{|\lambda_\alpha|} \varphi_\alpha(\xi, \eta) \int_T k \varphi_\alpha U dx dy$$

wickeln. Diese Reihe ist gliedweise differentierbar. Die unendlichen

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} = \sum_{\alpha} \frac{\lambda_{\alpha}}{|\lambda_{\alpha}|} \frac{\partial \varphi_{\alpha}}{\partial \xi} \int_T k \varphi_{\alpha} U dx dy, \quad \frac{\partial U}{\partial \eta} = \sum_{\alpha} \frac{\lambda_{\alpha}}{|\lambda_{\alpha}|} \frac{\partial \varphi_{\alpha}}{\partial \eta} \int_T k \varphi_{\alpha} U dx dy$$

vergieren in T und auf S unbedingt und gleichmäßig.

Die Theorie der linearen Integralgleichungen liefert demgegenüber den folgenden Satz:

Es sei

$$\begin{cases} G^*(\xi, \eta; x, y) = \int_T G(\xi, \eta; x_1, y_1) k(x_1, y_1) G(x_1, y_1; x, y) dx_1 dy_1, \\ G^{**}(\xi, \eta; x, y) = \int_T G^*(\xi, \eta; x_1, y_1) k(x_1, y_1) G(x_1, y_1; x, y) dx_1 dy_1, \end{cases}$$

es sei $g(x, y)$ eine in T und auf S stetige Funktion. Jede in der Form

$$V(\xi, \eta) = \int_T G^{**}(\xi, \eta; x, y) g(x, y) dx dy$$

darstellbare Funktion läßt sich in die unbedingt und gleichmäßig konvergente Reihe

$$V(\xi, \eta) = \sum_{\alpha} \frac{\lambda_{\alpha}}{|\lambda_{\alpha}|} \varphi_{\alpha}(\xi, \eta) \int_T k \varphi_{\alpha} V dx dy$$

entwickeln.

In dem zweiten Kapitel wird die folgende für die Variationsrechnung wichtige Randwertaufgabe behandelt.

Es sind diejenigen in T und auf S stetigen, in T regulären Lösungen der Differentialgleichung

$$p \frac{\partial}{\partial x} \left(p \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(p \frac{\partial u}{\partial y} \right) + qu + \lambda ku = 0$$

bestimmen, die auf S der Randbedingung

$$p \frac{\partial u}{\partial n} + \lambda hu = 0$$

genügen. Mit q wird irgendeine negative, nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung in T und auf S stetige Funktion bezeichnet; h ist eine beliebige nebst ihrer Ableitung stetige Funktion.

Auch hier gibt es im allgemeinen unendlich viele positive und unendlich viele negative Eigenwerte, und es gelten zu (10) und (11) analoge Entwicklungen. Nimmt k in T positive Werte an, so gibt es unendlich viele positive Eigenwerte. Der kleinste positive Eigenwert ist einfach. Die zugehörige Eigenfunktion kann in T nicht verschwinden.

Erstes Kapitel.

Das erste Randwertproblem.

§ 1.

Es sei T ein beschränktes, einfach oder mehrfach zusammenhängendes Gebiet in der Ebene der Variablen x und y . Seine Begrenzung S möge aus einer endlichen Anzahl geschlossener analytischer und regulärer Kurven bestehen. Es sei p eine in T und auf S erklärte positive, nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetige Funktion.

In diesem Paragraphen betrachten wir die in T und auf S stetigen, in T regulären, auf S verschwindenden Eigenfunktionen $\omega_j(x, y)$ ($j = 1, 2, \dots$) der Differentialgleichung

$$(1) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(p \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(p \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) + \mu \omega = 0^{\circ}.$$

Es seien μ_j die zugehörigen Eigenwerte. Der Theorie partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus entnehmen wir die folgenden Sätze:

1. Die Eigenwerte μ_j sind sämtlich positiv und häufen sich nur im Unendlichen.

2. Die unendliche Reihe $\sum_j \frac{1}{\mu_j^2}$ konvergiert.

3. Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial \omega_j}{\partial x}, \frac{\partial \omega_j}{\partial y}$ sind auch noch auf S stetig.

4. Für jede in T und auf S stetige Funktion $\omega(x, y)$ gilt die Beziehung

$$(2) \quad \int_T \omega^2 dx dy = \sum_j \left(\int_T \omega \omega_j dx dy \right)^2.$$

5. Es sei $G(\xi, \eta; x, y)$ die auf S verschwindende Greensche Funktion der Differentialgleichung (1) und es sei $\gamma(x, y)$ eine in T erklärte beschränkte, abteilungsweise stetige Funktion. Jede in der Form

$$(3) \quad \Omega(\xi, \eta) = \int_T G(\xi, \eta; x, y) \gamma(x, y) dx dy$$

^o) Wir nennen zur Abkürzung eine in T , ausführlicher — im Innern des Gebietes T , nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetige Lösung, — „in T regulär“.

Wir verstehen ferner unter einem „Bereich“ ein Gebiet nebst Rand (das „abgeschlossene Gebiet“). Statt „im Bereich T “ wird darum oft einfacher „in T und auf S “ oder „in $T+S$ “ gesagt. Demnach sind die Ausdrücke wie „in T stetig“ und „in $T+S$ stetig“ wohl zu unterscheiden.

Der Begriff einer in $T+S$ abteilungsweise stetigen Funktion ist bekannt. Wir nennen eine Funktion in T abteilungsweise stetig, wenn sie in jedem in T gelegenen Bereich abteilungsweise stetig ist.

stellbare Funktion läßt sich in eine in T und auf S gleichmäßig konvergierende Reihe

$$\Omega(\xi, \eta) = \sum_j \varphi_j(\xi, \eta) \int_T \Omega \varphi_j dx dy$$

entwickeln. Die Entwicklung (4) gilt demnach insbesondere für jede Funktion Ω , die nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung in T und auf S stetig ist und auf S verschwindet, wenn überdies die partiellen Ableitungen $\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2}$ beschränkt und in T theilungsweise stetig sind.

Es sei $\bar{\omega}(x, y)$ eine nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung in T und auf S stetige, auf S verschwindende Funktion.

Die unendliche Reihe

$$\sum_j \mu_j^2 \left(\int_T \bar{\omega} \omega_j dx dy \right)^2$$

convergiert. Es gilt

$$\int_T \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(p \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(p \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} \right) \right\}^2 dx dy = \sum_j \mu_j^2 \left(\int_T \bar{\omega} \omega_j dx dy \right)^2$$

Nach (2) ist in der That

$$\begin{aligned} \int_T \left\{ p \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(p \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} \right) \right\}^2 dx dy &= \sum_j \left[\int_T \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(p \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(p \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} \right) \right\} \omega_j dx dy \right]^2 = \\ &= \sum_j \left[\int_T p \left(\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x} \frac{\partial \omega_j}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} \frac{\partial \omega_j}{\partial y} \right) dx dy \right]^2 = \sum_j \left[\int_T \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(p \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(p \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} \right) \right\} \omega_j dx dy \right]^2 = \\ &= \sum_j \mu_j^2 \left(\int_T \bar{\omega} \omega_j dx dy \right)^2. \end{aligned}$$

Es gilt ferner die weitere wichtige Formel

$$\int_T p \left\{ \left(\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy = \sum_j \mu_j \left(\int_T \bar{\omega} \omega_j dx dy \right)^2.$$

Es ist in der That

$$\begin{aligned} \int_T p \left\{ \left(\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy &= - \int_T \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(p \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(p \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} \right) \right\} \bar{\omega} dx dy = \\ &= - \sum_j \int_T \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(p \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(p \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} \right) \right\} \omega_j dx dy \int_T \bar{\omega} \omega_j dx dy = \\ &= \sum_j \int_T p \left\{ \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x} \frac{\partial \omega_j}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} \frac{\partial \omega_j}{\partial y} \right\} \omega_j dx dy \int_T \bar{\omega} \omega_j dx dy = \\ &= - \sum_j \int_T \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(p \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(p \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} \right) \right\} \bar{\omega} dx dy \int_T \bar{\omega} \omega_j dx dy = \\ &= \sum_j \mu_j \left(\int_T \bar{\omega} \omega_j dx dy \right)^2. \end{aligned}$$

Aus (6) folgt, wenn $\bar{\omega}$ eine weitere wie $\bar{\omega}$ beschaffene Funktion bezeichnet, in bekannter Weise

$$(7) \quad \int_T p \left\{ \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} \right\} dx dy = \sum_j \mu_j \int_T \bar{\omega} \omega_j dx dy \int_T \bar{\omega} \omega_j dx dy.$$

Die Formel (6) gilt, wie wir jetzt zeigen wollen, in dem allgemeineren Falle, wenn $\bar{\omega}(x, y)$ eine beliebige nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung in T und auf S stetige, auf S verschwindende Funktion bezeichnet.

Wir bedienen uns zum Beweis der folgenden Erweiterung des Weierstraßschen Approximationssatzes.

Man kann in unendlich mannigfaltiger Weise eine Folge von Funktionen $\bar{\omega}^{(n)}(x, y)$ ($n = 1, 2, \dots$) angeben, die in T auf S analytisch und regulär sind, auf S verschwinden und überdies so beschaffen sind, daß in T und auf S gleichmäßig

$$(8) \quad \lim_{n=\infty} \bar{\omega}^{(n)} = \bar{\omega}, \quad \lim_{n=\infty} \frac{\partial \bar{\omega}^{(n)}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x}, \quad \lim_{n=\infty} \frac{\partial \bar{\omega}^{(n)}}{\partial y} = \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y}$$

gilt¹⁰).

Nach (6) ist für alle n

$$(9) \quad \int_T p \left\{ \left(\frac{\partial \bar{\omega}^{(n)}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{\omega}^{(n)}}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy = \sum_j \mu_j \left(\int_T \bar{\omega}^{(n)} \omega_j dx dy \right)^2,$$

demnach

$$(10) \quad \sum_{j=1}^m \mu_j \left(\int_T \bar{\omega}^{(n)} \omega_j dx dy \right)^2 \leq \int_T p \left\{ \left(\frac{\partial \bar{\omega}^{(n)}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{\omega}^{(n)}}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy,$$

¹⁰) Wir denken uns T auf die untere Hälfte $\mathfrak{S}^{(0)}$ der Einheitskugel $\mathfrak{S}$ konform abgebildet. Dadurch erscheint $\bar{\omega}(x, y)$ als eine Funktion des Ortes $\mathfrak{z}$ auf $\mathfrak{S}^{(0)}$. Sie sei als solche mit $\mathfrak{F}(\mathfrak{z})$ bezeichnet. Die Ortsfunktion $\mathfrak{F}(\mathfrak{z})$ ist stetig, auf dem Rande von $\mathfrak{S}^{(0)}$ gleich Null und hat stetige partielle Ableitungen erster Ordnung. Wir setzen $\mathfrak{F}(\mathfrak{z})$ über die ganze Kugel $\mathfrak{S}$ fort, indem wir den in bezug auf die Ebene $z=0$ symmetrischen Punkten auf $\mathfrak{S}$ entgegengesetzt gleiche Werte von $\mathfrak{F}(\mathfrak{z})$ zuordnen. Es sei jetzt $F(x, y, z)$ diejenige im Innern und auf dem Rande des von $\mathfrak{S}$ begrenzten Kugelkörpers $\mathfrak{K}$ stetige, in $\mathfrak{K}$ reguläre Potentialfunktion, die auf $\mathfrak{S}$ den Wert $\mathfrak{F}(\mathfrak{z})$ annimmt. Wir bezeichnen den auf dem nach $\mathfrak{z}$ führenden Halbmesser im Abstände $R \leq 1$ vom Mittelpunkt gelegenen Punkt mit $(R, \mathfrak{z})$, den Wert von $F(x, y, z)$ daselbst mit $\mathfrak{F}_R(\mathfrak{z})$. Setzt man für alle $\mathfrak{z}$ im Innern und auf dem Rande von $\mathfrak{S}^{(0)}$ etwa

$$\mathfrak{F}_{1-\frac{1}{m}}(\mathfrak{z}) = \mathfrak{F}^{(m)}(\mathfrak{z}) = \bar{\omega}^{(m)}(x, y),$$

so bilden $\bar{\omega}^{(m)}(x, y)$ eine Folge der gesuchten Art.

hin für $n \rightarrow \infty$

$$) \quad \sum_{j=1}^m \mu_j \left(\int_T \bar{\omega} \omega_j dx dy \right)^2 \leq \int_T p \left\{ \left(\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy,$$

auch

$$) \quad \sum_j \mu_j \left(\int_T \bar{\omega} \omega_j dx dy \right)^2 \leq \int_T p \left\{ \left(\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy.$$

Die unendliche Reihe linker Hand konvergiert. Daß hier das Gleichheitszeichen gilt, läßt sich wie folgt leicht zeigen.

Es sei $\nu(x, y)$ irgendeine in T und auf S nebst ihren partiellen Ableitungen der beiden ersten Ordnungen stetige, auf S verschwindende Funktion. Nach (7) gilt

$$) \quad \sum_j \mu_j \int_T \bar{\omega}^{(n)} \omega_j dx dy \int_T \nu \omega_j dx dy = \int_T p \left\{ \frac{\partial \bar{\omega}^{(n)}}{\partial x} \frac{\partial \nu}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\omega}^{(n)}}{\partial y} \frac{\partial \nu}{\partial y} \right\} dx dy.$$

Die unendliche Reihe linker Hand konvergiert unbedingt und gleichmäßig. In der Tat ist

$$4) \quad \left\{ \begin{aligned} & \left| \sum_{j>N} \mu_j \int_T \bar{\omega}^{(n)} \omega_j dx dy \int_T \nu \omega_j dx dy \right|^2 \\ & \leq \sum_{j>N} \mu_j \left(\int_T \bar{\omega}^{(n)} \omega_j dx dy \right)^2 \sum_{j>N} \mu_j \left(\int_T \nu \omega_j dx dy \right)^2 \\ & \leq \int_T p \left\{ \left(\frac{\partial \bar{\omega}^{(n)}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{\omega}^{(n)}}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy \sum_{j>N} \mu_j \left(\int_T \nu \omega_j dx dy \right)^2. \end{aligned} \right.$$

Da die Wertfolge

$$\int_T p \left\{ \left(\frac{\partial \bar{\omega}^{(n)}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{\omega}^{(n)}}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy$$

gegen

$$\int_T p \left\{ \left(\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy$$

konvergiert, so ist sie gewiß beschränkt. Da ferner die Reihe

$$\sum_j \mu_j \left(\int_T \nu \omega_j dx dy \right)^2$$

konvergiert, so konvergiert (13) nach (14) in der Tat im gleichen Grade. Für $n \rightarrow \infty$ folgt demnach aus (13)

$$15) \quad \int_T p \left\{ \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x} \frac{\partial \nu}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} \frac{\partial \nu}{\partial y} \right\} dx dy = \sum_j \mu_j \int_T \bar{\omega} \omega_j dx dy \int_T \nu \omega_j dx dy.$$

Es sei jetzt θ eine weitere in T und auf S nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetige, auf S verschwindende Funktion. Ist $\theta^{(n)}$ eine zu $\bar{\omega}^{(n)}$ analoge, θ approximierende Folge von Funktionen, so ist nach (15)

$$(16) \quad \int_T p \left\{ \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x} \frac{\partial \theta^{(n)}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} \frac{\partial \theta^{(n)}}{\partial y} \right\} dx dy = \sum_j \mu_j \int_T \bar{\omega} \omega_j dx dy \int_T \theta^{(n)} \omega_j dx dy.$$

Die Reihe $\sum_j \mu_j \left(\int_T \bar{\omega} \omega_j dx dy \right)^2$ ist, wie vorhin bewiesen, konvergent.

Durch eine Wiederholung der zuletzt durchgeführten Überlegungen wird gezeigt, daß die Reihe rechter Hand in (16) gleichmäßig konvergiert. Für $n \rightarrow \infty$ folgt hieraus

$$(17) \quad \int_T p \left\{ \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial y} \right\} dx dy = \sum_j \mu_j \int_T \bar{\omega} \omega_j dx dy \int_T \theta \omega_j dx dy.$$

Für $\theta = \bar{\omega}$ ergibt sich hieraus die zu beweisende Beziehung (6).

Die Formel (6) gilt übrigens noch unter erheblich allgemeineren Voraussetzungen bezüglich der Funktion $\bar{\omega}$, z. B. wenn $\bar{\omega}$ in $T + S$ stetig ist, auf S verschwindet und beschränkte, in T abteilungsweise stetige partielle Ableitungen erster Ordnung hat. Sie gilt auch, wenn darüber hinaus $\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x}$, $\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y}$ bei der Annäherung an gewisse in endlicher Anzahl vorhandene Punkte in T oder auf S unendlich groß wird, wenn nur das Integral

$$\int_T p \left\{ \left(\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy$$

konvergiert. Der Beweis läßt sich durch eine geeignete Modifikation der zuletzt durchgeführten Betrachtungen erbringen^{11a)}.

Die Ergebnisse dieses Paragraphen gelten auch noch bei Gebieten wesentlich allgemeinerer Natur. Wir wollen uns indessen bei diesen Betrachtungen nicht länger aufhalten.

^{11a)} Sie gilt, wie sich in ähnlicher Weise beweisen läßt, auch wenn folgende Bedingungen erfüllt sind. 1. Die Funktion u ist in $T + S$ stetig, verschwindet auf S und hat in $T + S$ beschränkte Differenzenquotienten. 2. Außer auf einer Menge von Punkten, deren Peano-Jordanscher Inhalt gleich Null ist, sind die partiellen Ableitungen $\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x}$, $\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y}$ vorhanden und stetig.

§ 2.

Es möge $k(x, y)$ eine in T und auf S erklärte stetige Funktion bezeichnen, die stetige partielle Ableitungen erster Ordnung hat. Es sei (x, y) eine in T und auf S stetige, auf S verschwindende, in T reguläre Lösung der Differentialgleichung

$$(8) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(p \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(p \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \lambda k u = 0.$$

Wie man weiß, sind die partiellen Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ auch noch auf S vorhanden und stetig.

Ist v irgendeine in T und auf S stetige, auf S verschwindende Funktion, die beschränkte, in T abteilungsweise stetige partielle Ableitungen erster Ordnungen hat, so ist, wie sich durch teilweise Integration leicht zeigen läßt,

$$(9) \quad \int_T \left\{ p \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \lambda k u v \right\} dx dy = 0.$$

Es sei im Sinne der Äquivalenz

$$(20) \quad u \sim \sum_j \frac{X_j}{\sqrt{\mu_j}} \omega_j, \quad v \sim \sum_j \frac{Y_j}{\sqrt{\mu_j}} \omega_j$$

gesetzt. Nach (17) ist

$$(21) \quad \int_T p \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy = \sum_j X_j Y_j = (X, Y).$$

Es gilt ferner

$$\begin{aligned} \int_T k u v dx dy &= \sum_j \int_T u \omega_j dx dy \int_T k v \omega_j dx dy = \sum_j \frac{X_j}{\sqrt{\mu_j}} \int_T k v \omega_j dx dy = \\ &= \sum_j \frac{X_j}{\sqrt{\mu_j}} \sum_h \int_T v \omega_h dx dy \int_T k \omega_j \omega_h dx dy = \sum_j \frac{X_j}{\sqrt{\mu_j}} \sum_h \frac{Y_h}{\sqrt{\mu_h}} \int_T k \omega_j \omega_h dx dy. \end{aligned}$$

Der Ausdruck

$$(23) \quad K(X, Y) = \sum_{j, h} \frac{X_j Y_h}{\sqrt{\mu_j \mu_h}} \int_T k \omega_j \omega_h dx dy$$

ist eine vollstetige Bilinearform der unendlich vielen Variablen X_j, Y_j ($j = 1, 2, \dots$), da, wie wir gleich sehen werden, die Summe der Quadrate der Koeffizienten

$$(24) \quad \sum_{j, h} \frac{1}{\mu_j \mu_h} \left(\int_T k \omega_j \omega_h dx dy \right)^2$$

konvergiert. In der Tat ist zunächst, da für $j \leq h$ allemal $\mu_j \leq \mu_h$ ist,

$$\begin{aligned}
 S^{(m)} &= \sum_{j, h=1}^m \frac{1}{\mu_j \mu_h} \left(\int_T k \omega_j \omega_h dx dy \right)^2 \leq 2 \sum_{\substack{j \leq m \\ j \leq h \leq m}} \frac{1}{\mu_j \mu_h} \left(\int_T k \omega_j \omega_h dx dy \right)^2 \\
 &\leq 2 \sum_{\substack{j \leq m \\ j \leq h \leq m}} \frac{1}{\mu_j^2} \left(\int_T k \omega_j \omega_h dx dy \right)^2.
 \end{aligned}$$

Ferner ist

$$\begin{aligned}
 \sum_{j \leq h \leq m} \left(\int_T k \omega_j \omega_h dx dy \right)^2 &\leq \sum_h \left(\int_T k \omega_j \omega_h dx dy \right)^2 = \int_T k^2 \omega_j^2 dx dy \\
 &\leq \text{Max } k^2 \int_T \omega_j^2 dx dy = \text{Max } k^2,
 \end{aligned}$$

demnach

$$(25) \quad S^{(m)} \leq 2 \text{Max } k^2 \sum_{j \leq m} \frac{1}{\mu_j^2}.$$

Da nun die Reihe $\sum_j \frac{1}{\mu_j^2}$ konvergent ist, so konvergiert, wie behauptet, die Reihe (24).

Aus (22) und (23) folgt jetzt

$$(26) \quad \int_T k u v dx dy = K(X, Y)$$

und aus (19), (21), (26) weiter

$$(27) \quad (X, Y) - \lambda K(X, Y) = 0.$$

Es sei $A(x, y)$ eine in T und auf S nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetige Funktion. In einer ganz analogen Weise gelangt man von der Differentialgleichung

$$(18^*) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(p \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(p \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \lambda k u = A$$

zu der Beziehung

$$(27^*) \quad (X, Y) - \lambda K(X, Y) = - \sum_j \frac{Y_j}{\sqrt{\mu_j}} \int_T A \omega_j dx dy.$$

Die Auflösung des homogenen und des nicht homogenen Randwertproblems ist damit auf die Auflösung der den Formeln (27) und (27*) entspringenden unendlich vielen linearen Gleichungen zurückgeführt.

§ 3.

Es sei $\bar{\lambda}$ ein Eigenwert der quadratischen Form $K(X, X)$ und darum, wie man ohne Schwierigkeiten sieht, auch der Differentialgleichung (18). Es seien

$$\bar{M}^{(n)}(X) = \sum \bar{m}_j^{(n)} X_j \quad (n = 1, \dots, r)$$

ie zu $\bar{\lambda}$ gehörigen linear unabhängigen Eigenformen. Die Werte

$$\bar{m}_j^{(\kappa)} \quad (j = 1, 2, \dots)$$

und die r linear unabhängigen Lösungssysteme der linearen Gleichungen

$$(X, Y) - \bar{\lambda} K(X, Y) = 0.$$

damit die nicht homogenen Gleichungen

$$(X, Y) - \bar{\lambda} K(X, Y) = \sum_j \gamma_j Y_j$$

Lösungen mit konvergenter Quadratsumme haben, müssen nach bekannten Sätzen folgende Bedingungsgleichungen erfüllt sein:

$$\sum_j \gamma_j \bar{m}_j^{(\kappa)} = 0. \quad (\kappa = 1, \dots, r)$$

Es sei λ^* ein Eigenwert der Differentialgleichung (18), und es sei ψ_ν^* ($\nu = 1, \dots, r_1$) ein vollständiges System zu λ^* gehöriger linear unabhängiger Eigenfunktionen. Es gilt

$$\psi_\nu^* = \sum_j \omega_j \int_T \psi_\nu^* \omega_j dx dy.$$

Offenbar ist

$$\sqrt{\mu_j} \int_T \psi_\nu^* \omega_j dx dy \quad (j = 1, 2, \dots)$$

im System der Lösungen der linearen Gleichungen

$$(X, Y) - \lambda^* K(X, Y) = 0.$$

Die linearen Formen

$$\Lambda_\nu^*(X) = \sum_j X_j \sqrt{\mu_j} \int_T \psi_\nu^* \omega_j dx dy \quad (\nu = 1, \dots, r_1)$$

sind zu λ^* gehörige Eigenformen von $K(X, X)$.

Es ist leicht zu zeigen, daß es keine zu λ^* gehörige Eigenform gibt, die von den Formen $\Lambda_\nu^*(X)$ ($\nu = 1, \dots, r_1$) linear unabhängig wäre.

Sei im Gegensatz hierzu $\Lambda_{r_1+1}^*(X) = \sum_j X_j \tau_j$ eine Form dieser Art. Man kann dann gewiß eine Funktion

$$A(x, y) = \sum_{j=1}^{r_1+1} \delta_j \omega_j$$

bestimmen, so daß

$$(28) \quad \sum_{j=1}^{r_1+1} \delta_j \int_T \psi_\nu^* \omega_j dx dy = 0, \quad (\nu = 1, \dots, r_1)$$

$$(28^*) \quad \sum_{j=1}^{r_1+1} \frac{1}{\sqrt{\mu_j}} \delta_j \tau_j \neq 0$$

gilt. Für (28) kann man auch setzen

$$\int_T A \psi_v^* dx dy = 0.$$

Nach bekannten Sätzen hat demnach die nicht homogene Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(p \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(p \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \lambda^* k u = A$$

in $T + S$ stetige, in T reguläre, auf S verschwindende Lösungen. Wegen (28*) hätten demgegenüber die unendlich vielen Gleichungen

$$(X, Y) - \lambda^* K(X, Y) = - \sum_{j=1}^{r_1+1} \frac{\delta_j}{\sqrt{\mu_j}} Y_j$$

keine Lösungen mit konvergenter Quadratsumme.

Demnach entsprechen die Eigenfunktionen der Differentialgleichung (18) und die Eigenformen der quadratischen Form $K(X, X)$ einander umkehrbar eindeutig.

§ 4.

Ist das Maß der Punktmenge $k(x, y) = 0$ ¹¹⁾ gleich Null, so ist die quadratische Form $K(X, X)$ abgeschlossen.

Es möge das Maß der Punktmenge $k(x, y) = 0$ gleich Null sein, und es möge im Gegensatz zu unserer Behauptung $K(X, X)$ nicht abgeschlossen sein. Dann gibt es eine Linearform $L^*(X) = \sum_j l_j^* X_j$, so daß für alle X_j mit konvergenter Quadratsumme

$$(29) \quad K(X, \cdot) L^*(\cdot) = \sum_{j,h} \frac{X_h l_j^*}{\sqrt{\mu_j \mu_h}} \int_T k \omega_j \omega_h dx dy = 0$$

gilt. Es sei im Sinne der Äquivalenz

$$(30) \quad v^*(x, y) \sim \sum_j \frac{l_j^*}{\sqrt{\mu_j}} \omega_j(x, y);$$

$v^*(x, y)$ ist eine nebst ihrem Quadrate integrierbare Funktion. Aus (29) folgen, wenn man $X_v = 1$, $X_h = 0$ ($h \neq v$) setzt, die unendlich vielen Gleichungen

$$(31) \quad \sum_j \frac{l_j^*}{\sqrt{\mu_j}} \int_T k \omega_j \omega_v dx dy = 0, \quad (v = 1, 2, \dots)$$

wofür man mit Rücksicht auf (30) auch setzen kann

$$\int_T k v^* \omega_v dx dy = 0. \quad (v = 1, 2, \dots)$$

¹¹⁾ D. h. der Menge der Punkte, in denen die Funktion $k(x, y)$ verschwindet

Nach bekannten Sätzen muß kv^* in T , höchstens außer auf einer Nullmenge, verschwinden. Das gleiche gilt offenbar für v^* . Die Fourierschen Koeffizienten $\frac{l^*}{\sqrt{\mu_j}}$ sind sämtlich gleich Null, die Linearform $L^*(X)$ ver-

schwindet identisch. Die quadratische Form $K(X, X)$ ist abgeschlossen.

Die vorstehende Bedingung der Abgeschlossenheit der Form $K(X, X)$ ist gewiß erfüllt, wenn k nur längs einer endlichen Anzahl stetig gekrümmter Kurvenstücke verschwindet, insbesondere, wenn k in T und auf S analytisch und regulär ist.

Das System der Eigenwerte der quadratischen Form $K(X, X)$ deckt sich, wie wir gesehen haben, mit dem System der Eigenwerte der Differentialgleichung (18) und darum auch der Integralgleichung

$$(32) \quad u(\xi, \eta) - \frac{\lambda}{2\pi} \int_T G(\xi, \eta; x, y) k(x, y) u(x, y) dx dy = 0.$$

Es seien λ_α ($\alpha = 1, 2, \dots$) die irgendwie einfach geordneten Eigenwerte von $K(X, X)$ und

$$(33) \quad L^{(\alpha)}(X) = \sum_j l_j^{(\alpha)} X_j$$

die zugehörigen, den Beziehungen

$$(34) \quad \begin{cases} L^{(\alpha)}(\cdot) L^{(\beta)}(\cdot) = \sum_j l_j^{(\alpha)} l_j^{(\beta)} = 0, & (\alpha \neq \beta) \\ L^{(\alpha)}(\cdot) L^{(\alpha)}(\cdot) = \sum_j (l_j^{(\alpha)})^2 = 1 \end{cases}$$

gemäß normierten Eigenformen. Den Ausführungen des § 3 gemäß ist die unendliche Reihe

$$(35) \quad \sum_j \frac{l_j^{(\alpha)}}{\sqrt{\mu_j}} \omega_j$$

gleichmäßig konvergent. Ihre Summe liefert eine zu λ_α gehörige Eigenfunktion der Differentialgleichung

$$(36) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(p \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(p \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \lambda_\alpha k u = 0.$$

Es sei

$$(37) \quad \sum_j \frac{l_j^{(\alpha)}}{\sqrt{\mu_j}} \omega_j(x, y) = \psi_\alpha(x, y).$$

Aus (34), (37), (20) und (21) folgt

$$(38) \quad \int_T p \left\{ \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x} \frac{\partial \psi_\beta}{\partial x} + \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial y} \frac{\partial \psi_\beta}{\partial y} \right\} dx dy = 0, \quad (\alpha \neq \beta)$$

$$(39) \quad \int_T p \left\{ \left(\frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_\alpha}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy = 1,$$

oder nach einer teilweisen Integration mit Rücksicht auf (36)

$$(40) \quad \int_T k \psi_\alpha \psi_\beta dx dy = 0, \quad (\alpha + \beta)$$

$$(41) \quad \int_T k \psi_\alpha^2 dx dy = \frac{1}{\lambda_\alpha}.$$

Setzt man jetzt

$$(42) \quad \psi_\alpha = \frac{1}{\sqrt{|\lambda_\alpha|}} \varphi_\alpha,$$

so erhält man

$$(43) \quad \int_T k \varphi_\alpha \varphi_\beta dx dy = 0, \quad (\alpha + \beta)$$

$$(44) \quad \int_T k \varphi_\alpha^2 dx dy = \frac{\lambda_\alpha}{|\lambda_\alpha|}.$$

§ 5.

Nach bekannten Sätzen ist

$$(45) \quad K(X, Y) = \sum_\alpha \frac{1}{\lambda_\alpha} L^{(\alpha)}(X) L^{(\alpha)}(Y)^{12}.$$

Es sei $\bar{u}(x, y)$ irgendeine in T und auf S stetige, auf S verschwindende Funktion, die beschränkte, in T abteilungsweise stetige partielle Ableitungen erster Ordnung hat. Wir setzen

$$(46) \quad \bar{u}(x, y) \sim \sum_j \frac{X_j}{\sqrt{\mu_j}} \omega_j.$$

Den Sätzen des § 1 gemäß ist

$$(47) \quad \left\{ \begin{aligned} L^{(\alpha)}(X) &= \int_T p \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial y} \right) dx dy = \\ &= - \int_T \bar{u} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(p \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(p \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial y} \right) \right\} dx dy = \\ &= \lambda_\alpha \int_T k \bar{u} \psi_\alpha dx dy = \frac{\lambda_\alpha}{\sqrt{|\lambda_\alpha|}} \int_T k \bar{u} \varphi_\alpha dx dy \end{aligned} \right.$$

sowie

$$(48) \quad K(X, X) = \int_T k \bar{u}^2 dx dy.$$

¹²⁾ Vgl. D. Hilbert, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, Vierte Mitteilung, Gött. Nachrichten 1906. S. 157–227 [S. 201].

aus der Formel (45) folgt demnach für $X_j = Y_j$

(49)

$$\int_T k \bar{u}^2 dx dy = \sum_{\alpha} \frac{\lambda_{\alpha}}{|\lambda_{\alpha}|} \left(\int_T k \bar{u} \varphi_{\alpha} dx dy \right)^2.$$

Die unendliche Reihe (49) konvergiert wie die Reihe (45) unbedingt.

Ist k in einem in T gelegenen Gebiet Θ positiv, so gibt es gewiß unendlich viele positive Eigenwerte.

Es seien im Gegensatz hierzu $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ die nur in endlicher Anzahl vorhandenen positiven Eigenwerte. Es sei $\bar{v}(x, y)$ eine nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung in T und auf S stetige, auf S verschwindende Funktion, die in $T - \Theta$ verschwindet und die Beziehungen

(50)

$$\int_T k \bar{v} \varphi_{\alpha} dx dy = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, m)$$

erfüllt. Führt man $\bar{v}$ für $\bar{u}$ in (49) ein, so gelangt man zu einem Widerspruch. Also ist die Anzahl der positiven Eigenwerte unendlich. Derselben ist die Anzahl negativer Eigenwerte unendlich, falls k in T negative Werte annimmt. Wechselt k in T das Vorzeichen, so gibt es demnach unendlich viele positive und unendlich viele negative Eigenwerte.

Es möge jetzt k höchstens in einer Punktmenge vom Maße Null in T verschwinden. Die quadratische Form $K(X, X)$ ist abgeschlossen und es gilt

(51)

$$(X, X) = \sum_{\alpha} [L^{(\alpha)}(X)]^2.$$

Den Sätzen des § 1 gemäß ist

(52)

$$(X, X) = \int_T p \left\{ \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy.$$

Aus (51), (52) und (47) folgt

(53)

$$\int_T p \left\{ \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy = \sum_{\alpha} |\lambda_{\alpha}| \left(\int_T k \bar{u} \varphi_{\alpha} dx dy \right)^2.$$

Ist $\bar{v}$ eine wie $\bar{u}$ beschaffene Funktion, so gilt, wie man sich jetzt leicht überzeugt, die weitere Formel

(54)

$$\int_T p \left\{ \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right\} dx dy = \sum_{\alpha} |\lambda_{\alpha}| \int_T k \bar{u} \varphi_{\alpha} dx dy \int_T k \bar{v} \varphi_{\alpha} dx dy.$$

Ist das Maß der Punktmenge $k(x, y) = 0$ größer als Null, so ist die quadratische Form $K(X, X)$ nicht abgeschlossen. In der Formel (53) tritt an Stelle des Gleichheitszeichens das Zeichen $\geq$.

§ 6.

Bei den folgenden Betrachtungen wird angenommen, daß die Menge $k(x, y) = 0$ vom Maße Null ist.

Es möge $g(x, y)$ eine in T und auf S stetige, auf S verschwindende Funktion, die beschränkte, in T abteilungsweise stetige partielle Ableitungen erster Ordnung hat, bezeichnen. Es sei (ξ, η) irgendein Punkt in T oder auf S , und es sei

$$(55) \quad G^*(\xi, \eta; x, y) = \int_T G(\xi, \eta; x_1, y_1) k(x_1, y_1) G(x_1, y_1; x, y) dx_1 dy_1 \\ = G^*(\xi, \eta; x, y).$$

Wie man sich leicht überzeugt, ist

$$(56) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(p \frac{\partial G^*}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(p \frac{\partial G^*}{\partial y} \right) = -2\pi k(x, y) G(\xi, \eta; x, y).$$

Die Funktion $G^*(\xi, \eta; x, y)$ ist, als Funktion von x und y aufgefaßt, in T und auf S nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetig und auf S gleich Null. Wir führen in (54) für $\bar{u}$ und $\bar{v}$ entsprechend $G^*(\xi, \eta; x, y)$ und $g(x, y)$ ein und erhalten,

$$(57) \quad \int_T G(\xi, \eta; x, y) k(x, y) g(x, y) dx dy = U(\xi, \eta)$$

gesetzt,

$$(58) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_T p \left\{ \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial G^*}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial G^*}{\partial y} \right\} dx dy &= - \int_T g \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(p \frac{\partial G^*}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(p \frac{\partial G^*}{\partial y} \right) \right\} dx dy \\ &= 2\pi \int_T G(\xi, \eta; x, y) k(x, y) g(x, y) dx dy = 2\pi U(\xi, \eta) \end{aligned} \right.$$

und wegen (32)

$$(59) \quad \left\{ \begin{aligned} &\int_T k g \varphi_a dx dy = \\ &= \frac{\lambda_a}{2\pi} \int_T k(x, y) g(x, y) \int_T G(x, y; x_1, y_1) k(x_1, y_1) \varphi_a(x_1, y_1) dx_1 dy_1 dx dy \\ &= \frac{\lambda_a}{2\pi} \int_T k(x_1, y_1) \varphi_a(x_1, y_1) \int_T G(x_1, y_1; x, y) k(x, y) g(x, y) dx dy dx_1 dy_1 \\ &= \frac{\lambda_a}{2\pi} \int_T k(x_1, y_1) \varphi_a(x_1, y_1) U(x_1, y_1) dx_1 dy_1, \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned} & \int_T k(x, y) G^*(\xi, \eta; x, y) \varphi_\alpha(x, y) dx dy = \\ & = \int_T \int_T G(\xi, \eta; x_1, y_1) k(x_1, y_1) G(x_1, y_1; x, y) k(x, y) \varphi_\alpha(x, y) dx_1 dy_1 dx dy = \\ & = \frac{2\pi}{\lambda_\alpha} \int_T G(\xi, \eta; x_1, y_1) k(x_1, y_1) \varphi_\alpha(x_1, y_1) dx_1 dy_1 = \frac{4\pi^2}{\lambda_\alpha^2} \varphi_\alpha(\xi, \eta). \end{aligned}$$

Aus (53), (58), (59) und (60) folgt nach einer geringfügigen Änderung der Bezeichnungen

$$U(\xi, \eta) = \sum_\alpha \frac{\lambda_\alpha}{|\lambda_\alpha|} \varphi_\alpha(\xi, \eta) \int_T k \varphi_\alpha U dx dy.$$

Die unendliche Reihe rechter Hand konvergiert unbedingt und gleichmäßig. In der Tat ist, wie man sich leicht überzeugt,

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha > N} |\varphi_\alpha(\xi, \eta)| \left| \int_T k \varphi_\alpha U dx dy \right| &= \left(\sum_{\alpha > N} \frac{|\lambda_\alpha|}{2\pi} \left| \int_T k g \varphi_\alpha dx dy \right| \left| \int_T k G^* \varphi_\alpha dx dy \right| \right) \\ &\leq \sum_{\alpha > N} \frac{|\lambda_\alpha|}{2\pi} \left| \int_T k g \varphi_\alpha dx dy \right|^2 \sum_{\alpha} \frac{|\lambda_\alpha|}{2\pi} \left| \int_T k G^* \varphi_\alpha dx dy \right|^2 \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_T p \left\{ \left(\frac{\partial G^*}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial G^*}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy \sum_{\alpha > N} \frac{|\lambda_\alpha|}{2\pi} \left(\int_T k g \varphi_\alpha dx dy \right)^2. \end{aligned}$$

Das Integral $\int_T p \left\{ \left(\frac{\partial G^*}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial G^*}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy$ stellt eine für alle (ξ, η) T und auf S gleichmäßig beschränkte Funktion dar, die unendliche Reihe $\sum_\alpha |\lambda_\alpha| \left(\int_T k g \varphi_\alpha dx dy \right)^2$ konvergiert, also konvergiert in der Tat (61) unbedingt und gleichmäßig.

Man kann noch einen Schritt weiter gehen und in der Formel (54) $\bar{u}$ den Ausdruck

$$\frac{\partial}{\partial \xi} G^*(\xi, \eta; x, y)$$

führen. In der Tat ist $\frac{\partial G^*}{\partial \xi}$, als Funktion von x und y aufgefaßt, T und auf S stetig und auf S gleich Null; die partiellen Ableitungen $\frac{\partial G^*}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 G^*}{\partial \xi \partial y}$ sind, außer für $\xi = x$, $\eta = y$, wo sie logarithmisch unendlich werden, stetig. Der Ausdruck

$$\int_T p \left\{ \left(\frac{\partial^2 G^*}{\partial \xi \partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 G^*}{\partial \xi \partial y} \right)^2 \right\} dx dy$$

ist für alle (ξ, η) in T und auf S gleichmäßig beschränkt. Man findet

$$(63) \quad \frac{\partial U(\xi, \eta)}{\partial \xi} = \sum_{\alpha} \frac{\lambda_{\alpha}}{|\lambda_{\alpha}|} \frac{\partial \varphi_{\alpha}(\xi, \eta)}{\partial \xi} \int_T k \varphi_{\alpha} U dx dy,$$

und analog

$$(64) \quad \frac{\partial U(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \sum_{\alpha} \frac{\lambda_{\alpha}}{|\lambda_{\alpha}|} \frac{\partial \varphi_{\alpha}(\xi, \eta)}{\partial \eta} \int_T k \varphi_{\alpha} U dx dy.$$

Auch die Reihen (63) und (64) konvergieren unbedingt und gleichmäßig.

Jede in der Form (61) darstellbare Funktion läßt sich demnach in eine in T und auf S gleichmäßig konvergierende Reihe nach den Eigenfunktionen der Differentialgleichung (18) entwickeln. Die so erhaltene Reihe ist gliedweise differentiierbar.

§ 7.

Es ist von Interesse, diese Ergebnisse mit den von der Theorie der linearen Integralgleichungen gelieferten Resultaten zu vergleichen¹³⁾.

Es mögen s und t beliebige Punkte in T oder auf S , $K(s, t)$ einen in $T + S$ stetigen, symmetrischen Kern vom positiven Typus, $A(s)$ eine beliebige in $T + S$ erklärte stetige Funktion, die sowohl positive als auch negative Werte annimmt, bezeichnen. Betrachten wir die Integralgleichung

$$(65) \quad \eta(s) - \lambda \int_T K(s, t) A(t) \eta(t) dt = 0.$$

Nach den neueren Untersuchungen von E. Garbe läßt sich, wenn der Kern $K(s, t)$ abgeschlossen ist, jede in der Form

$$(66) \quad V(s) = \int_T K(s, t) g(t) dt \quad (g(t) \text{ in } T + S \text{ stetig})$$

darstellbare Funktion in eine gleichmäßig konvergierende Reihe

$$(67) \quad V(s) = \sum_{\alpha} \frac{\lambda_{\alpha}}{|\lambda_{\alpha}|} \eta_{\alpha}(s) \int_T A(t) V(t) \eta_{\alpha}(t) dt$$

entwickeln¹⁴⁾.

Im vorliegenden Falle, wo für $K(s, t)$ und $A(t)$ entsprechend $\frac{1}{2\pi} G(\xi, \eta; x, y)$ und $k(x, y)$ eintreten, ist der vorstehende Satz nicht ohne weiteres anwendbar. Auch genügt es nicht, zu dem ersten iterierten Kern $G^*(\xi, \eta; x, y)$ überzugehen, denn dieser ist nicht vom positiven Typus. Erst der zweite iterierte Kern

¹³⁾ Vgl. A. Pell, loc. cit. ⁷⁾ sowie E. Garbe, loc. cit. ⁸⁾.

¹⁴⁾ Vgl. E. Garbe, loc. cit. ⁹⁾. Dieses Resultat folgt aus dem an jener Stelle angegebenen durch die Substitution

$$\pi_{\mu}(s) = A(s) \eta_{\mu}(s), \quad f(s) = A(s) V(s).$$

$$3) \quad G^{**}(\xi, \eta; x, y) = \int_T G^*(\xi, \eta; x_1, y_1) k(x_1, y_1) G(x_1, y_1; x, y) dx_1 dy_1$$

, wie sich leicht zeigen läßt, stetig und vom positiven Typus. Ist schließlich $k(x, y)$ in keinem Bereich in T identisch gleich Null, so ist $G^{**}(\xi, \eta; x, y)$ auch abgeschlossen. Jede in der Form

$$9) \quad \int_T G^{**}(\xi, \eta; x, y) g(x, y) dx dy \quad (g(x, y) \text{ in } T + S \text{ stetig})$$

stellbare Funktion läßt sich in eine nach Eigenfunktionen der Differentialgleichung (18) fortschreitende, unbedingt und gleichmäßig konvergente Reihe entwickeln.

Zu genau denselben Ergebnissen führen die etwas älteren Sätze über lineare Integralgleichungen von A. J. Pell¹⁵⁾.

Der in dieser Arbeit abgeleitete neue Entwicklungssatz reicht über das soeben genannte Resultat erheblich hinaus¹⁶⁾.

§ 8.

Es möge jetzt die (nach wie vor in $T + S$ nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetige) Funktion $k(x, y)$ beliebig sein. Die quadratische Form $K(X, X)$ ist im allgemeinen nicht abgeschlossen. Auch das Orthogonalsystem der Eigenformen $L^{(\alpha)}(X)$ ist nicht abgeschlossen. Wir ergänzen es zu einem abgeschlossenen durch die Linearformen

$$0) \quad R^{(\alpha)}(X) = \sum_j r_j^{(\alpha)} X_j. \quad (\alpha = 1, 2, \dots)$$

gilt jetzt

$$1) \quad (X, X) = \sum_{\alpha} [L^{(\alpha)}(X)]^2 + \sum_{\alpha} [R^{(\alpha)}(X)]^2,$$

mithin

$$2) \quad (X, X) - K(X, X) = \sum_{\alpha} \left(1 - \frac{1}{\lambda_{\alpha}}\right) [L^{(\alpha)}(X)]^2 + \sum_{\alpha} [R^{(\alpha)}(X)]^2.$$

Wir nehmen an, daß $k(x, y)$ in T Werte beiderlei Vorzeichens annimmt. Es gibt dann, wie wir wissen, unendlich viele positive und unendlich viele negative Eigenwerte. Wir denken uns die positiven Eigenwerte in eine Reihe $\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)} \leq \dots$ geordnet. Die zugehörigen Eigenfunktionen heißen $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \dots$. Wie man sich leicht überzeugt, ist

¹⁵⁾ Vgl. A. J. Pell, loc. cit.⁷⁾.

¹⁶⁾ Die von Garbe loc. cit.⁸⁾ S. 529 beiläufig gemachte Bemerkung, aus den Ergebnissen seiner Arbeit folge, daß jede nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetige Funktion, die längs gewissen Kurven weiteren Bedingungen genügt, ließe sich nach Eigenfunktionen des Problems entwickeln, ist nicht richtig.

$$(73) \quad (X, X) - K(X, X) \geq \left(1 - \frac{1}{\lambda^{(1)}}\right) \left\{ \sum_{\alpha} [L^{(\alpha)}(X)]^2 + \sum_{\alpha} [R^{(\alpha)}(X)]^2 \right\} \\ \geq \left(1 - \frac{1}{\lambda^{(1)}}\right) (X, X).$$

Es möge etwa $\lambda^{(1)} = \lambda^{(2)} = \dots = \lambda^{(r)}$ sein¹⁷⁾.

Wir haben uns vorhin alle Eigenwerte in *eine* Reihe λ_{α} ($\alpha = 1, 2, \dots$) geordnet gedacht. Es sei jetzt $\lambda_1 = \lambda^{(1)}, \dots, \lambda_r = \lambda^{(r)}$. In (73) gilt das Gleichheitszeichen nur, wenn

$$L^{(\alpha)}(X) = 0 \quad (\alpha \neq 1, \dots, r), \quad R^{(\alpha)}(X) = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots)$$

ist. Da das Orthogonalsystem $L^{(\alpha)}(X), R^{(\alpha)}(X)$ vollständig ist, so können diese Beziehungen, wie man leicht sieht, nur durch die r -Wertsysteme

$$(74) \quad X_j = l_j^{(\alpha)} \quad (\alpha = 1, \dots, r; j = 1, 2, \dots)$$

und ihre linearen Verbindungen erfüllt werden.

Es sei jetzt $\bar{u}(x, y)$ wie in § 5 irgendeine in $T + S$ stetige, auf S verschwindende Funktion, die beschränkte, in T abteilungsweise stetige partielle Ableitungen erster Ordnung hat. Setzt man in (73)

$$(75) \quad X_j = \int_T \bar{u} \omega_j dx dy, \quad (j = 1, 2, \dots)$$

so findet man

$$(76) \quad \int_T \left[p \left\{ \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 \right\} - k \bar{u}^2 \right] dx dy \geq \left(1 - \frac{1}{\lambda^{(1)}}\right) \int_T p \left\{ \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy$$

oder

$$(77) \quad \int_T p \left\{ \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy \geq \lambda^{(1)} \int_T k \bar{u}^2 dx dy.$$

Der kleinste Wert, den das Integral linker Hand für alle der Beziehung $\int_T k \bar{u}^2 dx dy = 1$ genügenden Funktionen $\bar{u}$ annehmen kann, ist nach (77) gleich $\lambda^{(1)}$.

In (77) gilt das Gleichheitszeichen wegen (74) nur für

$$(78) \quad \bar{u} = \varphi^{(j)} \quad (j = 1, \dots, r)^{18)}$$

Es ist nicht schwer zu sehen, daß die Funktionen $\varphi^{(j)}$ ($j = 1, \dots, r$) in T nicht verschwinden, demnach etwa positiv angenommen werden können.

Es möge in Gegensatz hierzu $\varphi^{(1)}(x, y)$ in T verschwinden, und es sei (x_0, y_0) ein Punkt, in dem $\varphi^{(1)}$ positiv ist. Es sei T^* das größte

¹⁷⁾ Wie sich bald zeigen wird, ist $r = 1$.

¹⁸⁾ Und für lineare Verbindungen dieser Funktionen. Vgl. übrigens die Fußnote ¹⁷⁾.

y_0) enthaltende Gebiet, in dem $\varphi^{(1)} > 0$ ist. Nach Voraussetzung ist T^* von T verschieden.

Wir setzen

$$9) \quad u^* = -\varphi^{(1)} \text{ in } T^*, \quad u^* = \varphi^{(1)} \text{ in } T - T^*$$

und erhalten augenscheinlich

$$10) \quad \int_T p \left\{ \left(\frac{\partial u^*}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u^*}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy = \lambda^{(1)} \int_T k u^{*2} dx dy,$$

was nicht möglich ist, da in der Formel (77) das Gleichheitszeichen nur für die Funktionen (78) gilt^{18a)}.

Man sieht jetzt leicht ein, daß der *kleinste positive Eigenwert* $\lambda^{(1)}$ ein *einfacher Eigenwert* ist¹⁹⁾. Die Zahl r ist gleich 1.

Sei etwa $r = 2$. Die Eigenfunktionen $\varphi^{(1)}$ und $\varphi^{(2)}$ sind in T positiv. Offenbar läßt sich eine lineare Kombination

$$\bar{\varphi} = c_1 \varphi^{(1)} + c_2 \varphi^{(2)}$$

bestimmen, die in einem vorgeschriebenen Punkte in T verschwindet. Die Funktion $\bar{\varphi}$ ist indessen eine zu $\lambda^{(1)}$ zugehörige Eigenfunktion der Differentialgleichung (18) und kann in T nicht verschwinden. In einer ganz ähnlichen Weise läßt sich der allgemeinere Satz beweisen:

Der kleinste Wert, den das Integral

$$1) \quad \int_T p \left\{ \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy$$

für alle den Beziehungen

$$2) \quad \int_T k \bar{u}^2 dx dy = 1, \quad \int_T k \bar{u} \varphi^{(1)} dx dy = 0, \dots, \quad \int_T k \bar{u} \varphi^{(r)} dx dy = 0 \quad (r \geq 1)$$

^{18a)} Die Funktion u^* ist in $T + S$ stetig, auf S gleich Null und hat in $T + S$ beschränkte Differenzenquotienten. Nach bekannten Sätzen sind, außer höchstens auf einer Menge vom Flächenmaße Null, die partiellen Ableitungen $\frac{\partial u^*}{\partial x}$, $\frac{\partial u^*}{\partial y}$ vorhanden und stetig. Da diese Ableitungen nur auf dem Rande S^* von T^* fehlen können, so sind diese vom Flächenmaße Null. Da S^* eine abgeschlossene Menge ist, so ist diese überdies kompakt und hat demnach den Peano-Jordanschen Inhalt Null. Der Bemerkung der Fußnote ^{11a)} zufolge gelten für die Funktion u^* die Formeln (49) und (53). Man darf darum in (77) für $\bar{u}$ auch u^* einsetzen.

¹⁹⁾ Daß der kleinste positive Eigenwert der Differentialgleichung (18) ein einfacher Eigenwert ist und daß die zugehörige Eigenfunktion in T nicht verschwindet, habe ich auf einem anderen Wege in der Arbeit, Untersuchungen über zweidimensionale reguläre Variationsprobleme. I. Das einfachste Problem bei fester Begrenzung, Zeitschrift für Math. u. Physik 28 (1917), S. 3-51 (insb. S. 13-14), bewiesen.

genügenden Funktionen $\bar{u}$ annehmen kann, ist gleich $\varphi^{(n+1)}$. Das Minimum wird für $\bar{u} = \varphi^{(n)}$ erreicht.

Die in diesem Paragraphen abgeleiteten Minimumsätze sind (für $p = 1$) schon früher auf einem anderen Wege von Herrn M. Mason dargetan worden²⁰). Herr Mason beweist die Existenz des Minimums direkt und folgert hieraus umgekehrt die Existenz der Eigenwerte.

§ 9.

Alle bisher angegebenen Sätze lassen sich auf die allgemeinere, sich selbst adjungierte partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung vom elliptischen Typus

$$(83) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(b \frac{\partial u}{\partial x} + c \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \lambda k^{(0)} u = 0, \quad ac - b^2 > 0, \quad a > 0$$

sinngemäß übertragen. Sei Θ ein $T + S$ ganz in seinem Innern enthaltendes Gebiet; a , b und c sind in Θ erklärte, nebst ihren partiellen Ableitungen der beiden ersten Ordnungen stetige Funktionen, die Funktion $k^{(0)}$ ist in Θ stetig und hat stetige Ableitungen erster Ordnung. Für das Integral (81) tritt jetzt der Ausdruck

$$(84) \quad \int_T \left\{ a \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2b \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + c \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy$$

ein.

Betrachten wir zunächst die partielle Differentialgleichung

$$(85) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y}}{\sqrt{ac - b^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{b \frac{\partial u}{\partial x} + c \frac{\partial u}{\partial y}}{\sqrt{ac - b^2}} \right) = 0.$$

Nach bekannten Sätzen gibt es unendlich viele umkehrbar eindeutige Transformationen

$$(86) \quad \begin{aligned} x &= x(x', y'), & y &= y(x', y'); & x' &= x'(x, y), & y' &= y'(x, y), \\ & & & & \frac{\partial(x, y)}{\partial(x', y')} &> 0, \end{aligned}$$

durch deren Vermittlung die Differentialgleichung (85) auf die Form

$$(87) \quad \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} = 0, \quad u'(x', y') = u(x, y)$$

gebracht werden kann²¹). Das Gebiet T wird dabei in ein von geschlossenen analytischen und regulären Kurven begrenztes Gebiet transformiert.

²⁰) Vgl. M. Mason, loc. cit. 4).

²¹) Vgl. L. Lichtenstein, „Randwertaufgaben der Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus. I. Die erste Rand-

Wendet man jetzt eine Transformation der Form (86) auf die Differentialgleichung (83) an, so gewinnt man, wie sich ohne Schwierigkeiten zeigen läßt, als Ergebnis die Differentialgleichung

$$(8) \quad \frac{\partial}{\partial x'} \left(p' \frac{\partial u'}{\partial x'} \right) + \frac{\partial}{\partial y'} \left(p' \frac{\partial u'}{\partial y'} \right) + \lambda k' u' = 0,$$

$$u'(x', y') = u(x, y), \quad p' = \sqrt{ac - b^2}, \quad k' = k^{(0)} \frac{\partial(x, y)}{\partial(x', y')}.$$

Zweites Kapitel.

Eine besondere Randwertaufgabe.

§ 1.

Wir gehen jetzt zur Behandlung der folgenden für die Variationsrechnung wichtigen Randwertaufgabe über.

Es sind diejenigen in T und auf S stetigen, in T regulären Lösungen der Differentialgleichung

$$(9) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(p \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(p \frac{\partial u}{\partial y} \right) + qu + \lambda ku = 0$$

zu bestimmen, die auf S der Randbedingung

$$(10) \quad p \frac{\partial u}{\partial n} + \lambda hu = 0$$

genügen. Mit q wird irgendeine negative, nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung in T und auf S stetige Funktion bezeichnet; h ist eine beliebige nebst ihrer Ableitung stetige Funktion, $\frac{\partial u}{\partial n}$ die Ableitung in der Richtung der Innennormale; λ ist ein reeller Parameter.

Betrachten wir die zu der zweiten Randwertaufgabe gehörigen Eigenfunktionen und Eigenwerte der Differentialgleichung

$$(11) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(p \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(p \frac{\partial u}{\partial y} \right) + qu + \mu u = 0.$$

Wir entnehmen der Theorie partieller Differentialgleichungen vom elliptischen Typus folgende Sätze:

1. Die Differentialgleichung (3) hat unendlich viele, lauter positive Eigenwerte μ_j ($j = 1, 2, \dots$).

2. Die unendliche Reihe $\sum_j \frac{1}{\mu_j^2}$ konvergiert.

Randwertaufgabe. Allgemeine ebene Gebiete“, Journal für Mathematik 172 (1913), S. 1–40 (S. 35–40). Die Funktionen $x'(x, y)$, $y'(x, y)$ sind in T und auf S nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetig.

Es sei $\omega_j(x, y)$ die zu μ_j gehörige, der Randbedingung $\frac{\partial \omega_j}{\partial n} = 0$ genügende Eigenfunktion.

3. Ist $\omega(x, y)$ irgendeine in T und auf S stetige Funktion, so gilt

$$(4) \quad \int_T \omega^2 dx dy = \sum_j \left(\int_T \omega \omega_j dx dy \right)^2.$$

Es sei $\bar{\omega}(x, y)$ irgendeine in $T + S$ nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetige, der Beziehung $\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial n} = 0$ genügende Funktion. Es gilt

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int_T \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(p \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(p \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} \right) - q \bar{\omega} \right]^2 dx dy = \\ &= \sum_j \left\{ \int_T \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(p \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(p \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} \right) - q \bar{\omega} \right] \omega_j dx dy \right\}^2 = \\ &= \sum_j \left\{ - \int_T \left[p \left(\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x} \frac{\partial \omega_j}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} \frac{\partial \omega_j}{\partial y} \right) + q \bar{\omega} \omega_j \right] dx dy \right\}^2 = \\ &= \sum_j \left\{ \int_T \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(p \frac{\partial \omega_j}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(p \frac{\partial \omega_j}{\partial y} \right) + q \omega_j \right] \bar{\omega} dx dy \right\}^2 = \\ &= \sum_j \mu_j^2 \left(\int_T \bar{\omega} \omega_j dx dy \right)^2. \end{aligned} \right.$$

Ferner ist

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int_T \left[p \left\{ \left(\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} \right)^2 \right\} - q \bar{\omega}^2 \right] dx dy = \\ &= - \int_T \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(p \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(p \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} \right) + q \bar{\omega} \right] \bar{\omega} dx dy = \\ &= - \sum_j \int_T \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(p \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(p \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} \right) + q \bar{\omega} \right] \omega_j dx dy \int_T \bar{\omega} \omega_j dx dy = \\ &= \sum_j \mu_j \left(\int_T \bar{\omega} \omega_j dx dy \right)^2. \end{aligned} \right.$$

Die Formel (6) gilt auch noch, wenn $\bar{u}$ irgendeine in T und auf S nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetige Funktion bezeichnet.

Der Beweis wird ganz wie bei dem entsprechenden Satz in § 1 des I. Kapitels geführt. Für den dort benutzten Approximationssatz tritt jetzt der folgende Satz ein:

Man kann in unendlich mannigfaltiger Weise eine Folge in T und

von S analytischer und regulärer, der Beziehung $\frac{\partial \bar{\omega}^{(n)}}{\partial n} = 0$ genügender Funktionen $\bar{\omega}^{(n)}$ ($n=1, 2, \dots$) angeben, die folgende Eigenschaften haben:

1. In T und auf S gilt gleichmäßig

$$\lim_{n=\infty} \bar{\omega}^{(n)} = \bar{\omega}.$$

2. In jedem Bereiche in T gilt gleichmäßig

$$\lim_{n=\infty} \frac{\partial \bar{\omega}^{(n)}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x}, \quad \lim_{n=\infty} \frac{\partial \bar{\omega}^{(n)}}{\partial y} = \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y}.$$

3. Die Funktionen $\frac{\partial \bar{\omega}^{(n)}}{\partial x}$, $\frac{\partial \bar{\omega}^{(n)}}{\partial y}$ sind gleichmäßig beschränkt²²⁾.

Aus (6) folgt in leicht ersichtlicher Weise, wenn $\bar{\omega}$ eine weitere nebenst partiellen Ableitungen erster Ordnung in $T + S$ stetige Funktion bezeichnet,

$$\left\{ \begin{aligned} \int_T \left\{ p \left(\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} \right) - q \bar{\omega} \bar{\omega} \right\} dx dy = \\ = \sum_j \mu_j \int_T \bar{\omega} \omega_j dx dy \int_T \bar{\omega} \omega_j dx dy. \end{aligned} \right.$$

Die Formel (6) gilt, wie in ganz ähnlicher Weise bewiesen werden kann, wenn $\bar{\omega}$ eine in T und auf S stetige Funktion bezeichnet, die beschränkte, in T abteilungsweise stetige partielle Ableitungen erster Ordnung hat. Auch dürfen die partiellen Ableitungen $\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x}$, $\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y}$ bei der Annäherung an gewisse isoliert liegende Punkte in T oder auf S unendlich groß werden, wenn nur das Integral

$$\int_T p \left\{ \left(\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy$$

konvergiert.

§ 2.

Es seien p_1 und p_2 irgendwelche in T und auf S nebenst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetige Funktionen, die auf S den Beziehungen

$$p_1 = -h \frac{dy}{ds}, \quad p_2 = h \frac{dx}{ds}$$

genügen. Es sei u eine nebenst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung in $T + S$ stetige Funktion, die in T stetige partielle Ableitungen zweiter

²²⁾ Der Beweis läßt sich ganz wie bei dem in § 1 des ersten Kapitels betrachteten Approximationssatz führen. Der einzige Unterschied besteht darin, daß diesmal die Funktion $\mathfrak{F}(\mathfrak{s})$ dadurch über die Einheitskugel fortgesetzt wird, daß man ihr in den bezug auf die Ebene $z=0$ symmetrischen Punkten gleiche Werte erteilt.

Ordnung hat. Es möge schließlich v eine *willkürliche* in T und auf S nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetige Funktion bezeichnen, und es sei

$$(12) \quad \left\{ \int_T \left[p \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) - quv + \lambda \left\{ p_1 \frac{\partial}{\partial x}(uv) + p_2 \frac{\partial}{\partial y}(uv) \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \left(-k + \frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{\partial p_2}{\partial y} \right) uv \right\} \right] dx dy = 0. \right.$$

Durch teilweise Integration erhält man aus (12) mit Rücksicht auf (11)

$$(13) \quad \int_T \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(p \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(p \frac{\partial u}{\partial y} \right) + qu + \lambda ku \right] v dx dy + \int_S \left(p \frac{\partial u}{\partial n} + \lambda hu \right) v ds = 0$$

demnach, da v willkürlich ist,

$$(14) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(p \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(p \frac{\partial u}{\partial y} \right) + qu + \lambda ku = 0 \quad \text{in } T,$$

$$(15) \quad p \frac{\partial u}{\partial n} + \lambda hu = 0 \quad \text{auf } S.$$

Die Auflösung der Differentialgleichung (14) unter Zugrundelegung der Randbedingungen (15) und die Bestimmung einer Funktion u den Beziehungen (13) gemäß sind demnach zwei völlig äquivalente Probleme.

Wir setzen

$$(16) \quad u \sim \sum_j \frac{X_j}{\sqrt{\mu_j}} \omega_j, \quad v \sim \sum_j \frac{Y_j}{\sqrt{\mu_j}} \omega_j$$

und erhalten nach (9)

$$(17) \quad \int_T \left\{ p \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) - quv \right\} dx dy = \sum_j X_j Y_j.$$

Betrachten wir jetzt das Integral

$$(18) \quad \int_T p_1 \frac{\partial u}{\partial x} v dx dy.$$

Führt man hier für u und v die Ausdrücke

$$(19) \quad u_m = \sum_{j=1}^m \frac{X_j}{\sqrt{\mu_j}} \omega_j, \quad v_m = \sum_{j=1}^m \frac{Y_j}{\sqrt{\mu_j}} \omega_j,$$

so erhält man

$$(20) \quad K'_m(X, Y) = \sum_{j, r=1}^m \frac{X_j}{\sqrt{\mu_j}} \frac{Y_r}{\sqrt{\mu_r}} \int_T p_1 \frac{\partial \omega_j}{\partial x} \omega_r dx dy.$$

Es ist nun

$$1) \left\{ \begin{aligned} [K'_m(X, Y)]^2 &= \left(\int_T p_1 \frac{\partial u_m}{\partial x} v_m dx dy \right)^2 \leq \int_T p_1^2 v_m^2 dx dy \int_T \left(\frac{\partial u_m}{\partial x} \right)^2 dx dy \\ &\leq \frac{\text{Max } p_1^2}{\text{Min } p} \int_T v_m^2 dx dy \int_T p \left\{ \left(\frac{\partial u_m}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_m}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy \\ &\leq \frac{\text{Max } p_1^2}{\text{Min } p} \sum_j \frac{Y_j^2}{\mu_j} \left(\sum_j X_j^2 + \text{Max } q \sum_j \frac{X_j^2}{\mu_j} \right). \end{aligned} \right.$$

Die Bilinearform $K'(X, Y)$ ist demnach beschränkt. Sie ist ferner, wie wir jetzt zeigen wollen, vollstetig.

Wir bezeichnen den Wert, den $K'(X, Y)$ annimmt, wenn man $X_1 = \dots = X_m = 0$ setzt, mit ${}^m K'(X, Y)$.

Aus (21) folgt leicht

$$2) \left\{ \begin{aligned} [{}^m K'(X, Y)]^2 &\leq \frac{\text{Max } p_1^2}{\text{Min } p} \sum_{j>m} \frac{Y_j^2}{\mu_j} \left(\sum_j X_j^2 + \text{Max } q \sum_j \frac{X_j^2}{\mu_j} \right) \\ &\leq \frac{1}{\mu_m} \frac{\text{Max } p_1^2}{\text{Min } p} \sum_{j>m} Y_j^2 \left(\sum_j X_j^2 + \text{Max } q \sum_j \frac{X_j^2}{\mu_j} \right). \end{aligned} \right.$$

Wegen $\lim_{m \rightarrow \infty} \mu_m = 0$ konvergiert ${}^m K'(X, Y)$ für alle den Beziehungen $\sum_j X_j^2 = 1, \sum_j Y_j^2 = 1$ genügenden X_j und Y_j , gleichmäßig gegen Null. Die Differenz $K'(X, Y) - {}^m K'(X, Y)$ läßt sich in der Form

$$3) \quad Y_1 M_1(X) + \dots + Y_m M_m(X)$$

darstellen, unter $M_1(X), \dots, M_m(X)$ gewisse Linearformen der Variablen X_j verstanden. Diese Linearformen sind bekanntlich vollstetig. Hieraus und aus der soeben hervorgehobenen Gleichmäßigkeit des Grenzüberganges

$$\lim_{m \rightarrow \infty} {}^m K'(X, Y) = 0$$

folgt, wie man leicht findet, daß $K'(X, Y)$ vollstetig ist.

Setzt man

$$4) \quad \int_T \left\{ p_1 \frac{\partial}{\partial x} (uv) + p_2 \frac{\partial}{\partial y} (uv) + \left(-k + \frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{\partial p_2}{\partial y} \right) uv \right\} dx dy = -K(X, Y),$$

so findet man in ähnlicher Weise, daß $K(X, Y)$ vollstetig ist. Aus (12), (17) und (24) folgt demnach

$$5) \quad (X, Y) - \lambda K(X, Y) = 0.$$

Die Eigenwerte λ_a der quadratischen Form $K(X, X)$ sind zugleich

die Eigenwerte unseres Problems. Damit ist die Existenz der unendlich vielen Eigenwerte der Randwertaufgabe (1), (2) dargetan.

Wie im Kapitel I § 3 läßt sich zeigen, daß die Eigenfunktionen der Differentialgleichung (1) und die Eigenformen von $K(X, X)$ einander umkehrbar eindeutig entsprechen.

Es seien $L_\alpha(X) = \sum_j l_j^{(\alpha)} X_j$ die zu λ_α gehörigen, in bekannter Weise normierten Eigenformen. Die unendliche Reihe

$$(26) \quad \sum_j \frac{l_j^{(\alpha)}}{\sqrt{\mu_j}} X_j$$

konvergiert unbedingt und gleichmäßig. Setzt man

$$(27) \quad \sum_j \frac{l_j^{(\alpha)}}{\sqrt{\mu_j}} X_j = \psi_\alpha(x, y),$$

so ist ψ_α eine zu λ_α gehörige Eigenfunktion des Problems. Aus

$$(28) \quad L_\alpha(\cdot) L_\beta(\cdot) = 0 \quad (\alpha \neq \beta), \quad L_\alpha(\cdot) L_\alpha(\cdot) = 1$$

folgt wegen (17)

$$(29) \quad \int_T \left[p \left\{ \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x} \frac{\partial \psi_\beta}{\partial x} + \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial y} \frac{\partial \psi_\beta}{\partial y} \right\} - q \psi_\alpha \psi_\beta \right] dx dy = 0, \quad (\alpha \neq \beta)$$

$$(30) \quad \int_T \left[p \left\{ \left(\frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_\alpha}{\partial y} \right)^2 \right\} - q \psi_\alpha^2 \right] dx dy = 1,$$

oder nach einer teilweisen Integration

$$(31) \quad \left\{ \begin{array}{l} - \int_T \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(p \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(p \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial y} \right) + q \psi_\alpha \right] \psi_\beta dx dy + \\ + \int_S p \psi_\beta \left(\frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x} dy - \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial y} dx \right) = 0, \end{array} \right. \quad (\alpha \neq \beta)$$

folglich wegen (14) und (15)

$$(32) \quad \int_T k \psi_\alpha \psi_\beta dx dy + \int_S h \psi_\alpha \psi_\beta ds = 0 \quad (\alpha \neq \beta)$$

und analog

$$(33) \quad \int_T k \psi_\alpha^2 dx dy + \int_S h \psi_\alpha^2 ds = \frac{1}{\lambda_\alpha}.$$

Setzt man jetzt

$$(34) \quad \psi_\alpha = \frac{\varphi_\alpha}{\sqrt{|\lambda_\alpha|}},$$

findet man

$$\int_T k \varphi_\alpha \varphi_\beta dx dy + \int_S h \varphi_\alpha \varphi_\beta ds = 0, \quad (\alpha \neq \beta)$$

$$\int_T k \varphi_\alpha^2 dx dy + \int_S h \varphi_\alpha^2 ds = \frac{\lambda_\alpha}{|\lambda_\alpha|}.$$

Die Formel

$$K(X, X) = \sum_\alpha \frac{1}{\lambda_\alpha} [L_\alpha(X)]^2,$$

wie in § 5 des ersten Kapitels zu dem Satze

Es sei $\bar{u}(x, y)$ irgendeine in $T + S$ stetige Funktion, die beschränkte, T abteilungsweise stetige partielle Ableitungen erster Ordnung hat.

Es gilt

$$\int_T k \bar{u}^2 dx dy + \int_S h \bar{u}^2 ds = \sum_\alpha \frac{\lambda_\alpha}{|\lambda_\alpha|} \left(\int_T k \bar{u} \varphi_\alpha dx dy + \int_S h \bar{u} \varphi_\alpha ds \right)^2.$$

Die Formel

$$(X, X) \geq \sum_\alpha [L_\alpha(X)]^2$$

wie ebenso zu der Entwicklung

$$\int_T \left[p \left\{ \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 \right\} - q \bar{u}^2 \right] dx dy \geq \sum_\alpha |\lambda_\alpha| \left(\int_T k \bar{u} \varphi_\alpha dx dy + \int_S h \bar{u} \varphi_\alpha ds \right)^2.$$

Ist die Form $K(X, X)$ abgeschlossen, so gilt hier das Gleichheitssatz.

Aus der Formel (38) folgt ganz wie in § 3 des ersten Kapitels Satz

Nimmt k in T positive Werte an, so gibt es unendlich viele positive Eigenwerte. Nimmt k in T negative Werte an, so gibt es ebenso unendlich viele negative Eigenwerte. Wechselt k in T das Vorzeichen, so gibt es demnach sowohl unendlich viele positive, als auch unendlich viele negative Eigenwerte.

Es mögen jetzt unendlich viele positive Eigenwerte existieren. Aus den Formeln (38) und (40) läßt sich ganz wie in § 6 des ersten Kapitels folgende Satz ableiten:

Der kleinste Wert, den das Integral

$$\int_T \left[p \left\{ \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 \right\} - q \bar{u}^2 \right] dx dy$$

für alle in $T + S$ stetigen Funktionen $\bar{u}$ annimmt, die beschränkte, in T teilungsweise stetige partielle Ableitungen erster Ordnung haben und der Beziehung

$$(42) \quad \int_T k \bar{u}^2 dx dy + \int_S h \bar{u}^2 ds = 1$$

genügen, ist gleich $\lambda^{(1)}$, dem kleinsten positiven Eigenwert des Randwertproblems (14), (15).

Wir denken uns die positiven Eigenwerte in eine Reihe $\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)} \leq \dots$ geordnet. Die zugehörigen Eigenfunktionen heißen $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \dots$. Es möge etwa $\lambda^{(1)} = \dots = \lambda^{(r)}$ sein²³⁾.

Wir bemerken vor allem, daß $\lambda^{(1)}$ jedenfalls nicht größer als der kleinste positive Eigenwert $\lambda^{(1)*}$ der Differentialgleichung (14) ist, der zu dem ersten Randwertproblem gehört.

Wie im Kapitel I läßt sich zeigen, daß $\lambda^{(1)*}$ der kleinste Wert ist, den der Ausdruck

$$\int_T \left[p \left\{ \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 \right\} - q \bar{u}^2 \right] dx dy$$

unter den Nebenbedingungen $\bar{u} = 0$ auf S und $\int_T k \bar{u}^2 dx dy = 1$ annimmt.

Die dabei in Frage kommenden Vergleichsfunktionen erfüllen augenscheinlich die Beziehung (42) und bilden daher eine Untermenge der bei der Bestimmung von $\lambda^{(1)}$ heranzuziehenden Funktionen. Hieraus folgt aber, in der Tat, $\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(1)*}$. Betrachten wir etwa die Eigenfunktion $\varphi^{(1)}$. Sie kann, wie wir jetzt zeigen wollen, in T nicht verschwinden.

Es möge im Gegensatz hierzu $\varphi^{(1)}$ in T Nullstellen haben. Es sei (x_0, y_0) ein Punkt in T , in dem $\varphi^{(1)}$ positiv ist, und es sei T^* das größte (x_0, y_0) enthaltende Gebiet, in dem $\varphi^{(1)} > 0$ ist. Nach Voraussetzung ist T^* von T verschieden.

Wir setzen

$$u^* = -\varphi^{(1)} \text{ in } T^*, \quad u^* = \varphi^{(1)} \text{ in } T - T^*$$

und finden

$$\int_T \left[p \left\{ \left(\frac{\partial u^*}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u^*}{\partial y} \right)^2 \right\} - q u^{*2} \right] dx dy = \lambda^{(1)},$$

$$\int_T k (u^*)^2 dx dy + \int_S h (u^*)^2 ds = 1,$$

was nicht möglich ist, da der Wert $\lambda^{(1)}$ nur zu den Funktionen $\varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(r)}$ gehört.

²³⁾ Es wird sich bald zeigen, daß $r = 1$ ist.

Da $\varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(r)}$ in T nicht verschwinden können, so ist $\lambda^{(1)}$ ein einfacher Eigenwert. Andernfalls gäbe es nämlich, wie man leicht sieht (l. § 8 des I. Kapitels) zu $\lambda^{(1)}$ gehörige Eigenfunktionen, die in T verschwinden.

Man überzeugt sich jetzt leicht, daß $\lambda^{(1)}$ nicht gleich $\lambda^{(1)*}$ sein kann. Andernfalls müßte die Eigenfunktion $\varphi^{(1)}$ auf S der Bedingung

$$p \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial n} + h \varphi^{(1)} = 0$$

1, da sie in T nicht verschwindet, der weiteren Bedingung

$$\varphi^{(1)} = 0$$

) S genügen.

Aus (43) und (44) folgt

$$\frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial n} = 0.$$

Nach bekannten Sätzen müßte $\varphi^{(1)}$ in T identisch verschwinden.

Es ist also

$$\lambda^{(1)} < \lambda^{(1)*}.$$

) Es möge etwa $\varphi^{(1)}$ in T positiv sein. Dann ist $\varphi^{(1)}$ auf S jedenfalls nicht negativ und, wie wir schon wissen, auch nicht identisch gleich Null. Es müßte nämlich $\varphi^{(1)}$ auf S auch negative Werte annehmen, so müßte das auch in T in hinreichender Nähe von S der Fall sein. Dann müßte aber $\varphi^{(1)}$ in T verschwinden müssen.

Alle in diesem Kapitel abgeleiteten Sätze lassen sich auf die allgemeine Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(b \frac{\partial u}{\partial x} + c \frac{\partial u}{\partial y} \right) + q^{(0)} u + \lambda k^{(0)} u = 0,$$

$$ac - b^2 > 0, \quad a > 0, \quad q^{(0)} < 0$$

1 die Randbedingung

$$\left(b \frac{dx}{ds} - a \frac{dy}{ds} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \left(c \frac{dx}{ds} - b \frac{dy}{ds} \right) \frac{\partial u}{\partial y} + \lambda h^{(0)} u = 0$$

gemäß übertragen. Für (41) tritt jetzt das Integral

$$\int_T \left[a \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^2 + 2b \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + c \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 - q^{(0)} \bar{u}^2 \right] dx dy;$$

(42) die Beziehung

$$\int_T k^{(0)} \bar{u}^2 dx dy + \int_S h^{(0)} \bar{u}^2 ds = 1$$

Es sei zum Schluß bemerkt, daß das in diesem Kapitel betrachtete Randwertproblem zwei bekannte Randwertaufgaben als besondere Fälle enthält. Ist h identisch gleich Null, so liegt das zweite Randwertproblem der Differentialgleichung (1) vor. Ist k identisch gleich Null, so handelt es sich um das Randwertproblem

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(p \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(p \frac{\partial u}{\partial y} \right) + qu = 0 \text{ in } T,$$

$$p \frac{\partial u}{\partial n} + \lambda hu = 0 \text{ auf } S.$$

(Eingegangen am 26. November 1918.)

Über einen Satz des Herrn Helge von Koch über die Integrale linearer Differentialgleichungen.

Von

Oskar Perron in Heidelberg.

§ 1.

In der linearen Differentialgleichung

$$\frac{d^n y}{dx^n} + \frac{P_1(x)}{x-a} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \frac{P_2(x)}{(x-a)^2} \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \dots + \frac{P_n(x)}{(x-a)^n} y = 0$$

seien die $P_\lambda(x)$ in der Umgebung der Stelle $x=a$ eindeutige Funktionen. Sind sie regulär, so liegt der Fuchssche Typus vor; die Integrale verhalten sich für $x=a$ alle bestimmt. Anders ist es, wenn die Funktionen $P_\lambda(x)$ zum Teil oder alle an der Stelle $x=a$ einen Pol haben. Herr Helge von Koch stellt sich in einer kürzlich erschienenen Arbeit¹⁾ die Aufgabe, in diesem Fall das Wachstum der Integrale in der Umgebung $x=a$ zu untersuchen; er gelangt zu folgendem Resultat:

Sei ν_λ die kleinste ganze Zahl ≥ 0 derart, daß die Funktion

$$(x-a)^{\nu_\lambda} P_\lambda(x)$$

der Stelle $x=a$ regulär ist, und sei

$$\text{Max} \left(\nu_1, \frac{\nu_2}{2}, \frac{\nu_3}{3}, \dots, \frac{\nu_n}{n} \right) = k.$$

Setzt man dann

$$x-a = |x-a| e^{i\vartheta}$$

und beschränkt den Winkel ϑ auf ein endliches Intervall, so gilt für jedes Integral y nach Vorgabe einer beliebig kleinen positiven Zahl ε die Abschätzung

¹⁾ Helge von Koch: Un théorème sur les intégrales irrégulières des équations différentielles linéaires et son application au problème de l'intégration. Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik, Band 13 (1918).

$$(4) \quad |y| < e^{\left| \frac{1}{x-a} \right|^{k+\varepsilon}},$$

wenn nur $|x-a|$ genügend klein wird.

Herr Helge von Koch bedient sich zum Beweis dieses Satzes seiner Methode der unendlichen Determinanten. Ich werde im folgenden auf einem viel kürzeren und elementarerem Weg die wesentlich schärfere Ungleichung

$$(5) \quad |y| < e^{K \left| \frac{1}{x-a} \right|^k}$$

nachweisen, wo K eine geeignete Konstante ist. Das ist der Inhalt des § 2.

Der § 3 ist der Aufgabe gewidmet, für K eine möglichst kleine Zahl zu finden, wobei sich folgendes zeigt:

Setzt man

$$(6) \quad \lim_{x=a} (x-a)^{\lambda k} P_{\lambda}(x) = p_{\lambda} \quad (\lambda = 1, 2, \dots, n),$$

so sind nach der obigen Definition der Zahl k die p_{λ} offenbar endliche Zahlen, und zwar ist mindestens eine von Null verschieden. Ist dann s der größte unter den absoluten Beträgen der Wurzeln der algebraischen Gleichung

$$(7) \quad \sigma^n + p_1 \sigma^{n-1} + \dots + p_n = 0,$$

so ist für K die Zahl

$$K = \frac{s}{k} + \varepsilon$$

zulässig, wo ε eine beliebig kleine positive Zahl bedeutet.

Dagegen ist, wie in § 4 gezeigt wird, die Zahl

$$K = \frac{s}{k} - \varepsilon$$

nicht mehr zulässig, vorausgesetzt, daß das endliche Intervall, auf welches der Winkel θ beschränkt wird, mindestens die Länge $\frac{2\pi}{k}$ hat. Die beiden letzten Resultate zusammengenommen besagen offenbar soviel wie

$$(8) \quad \limsup_{x=a} |x-a|^k \log |y| = \frac{s}{k},$$

und zwar gilt diese Gleichung für das *allgemeine* Integral; höchstens für eine $(n-1)$ -gliedrige lineare Schar von Partikulärintegralen hat der $\limsup$ einen kleineren Wert.

§ 2.

Setzt man

$$(x-a)^{\lambda k} P_{\lambda}(x) = Q_{\lambda}(x) \quad (\lambda = 1, 2, \dots, n),$$

sind nach der Definition der Zahl k die Funktionen $Q_{\lambda}(x)$ für $x=a$ endlich (aber nicht notwendig regulär, weil ja k im allgemeinen keine ganze Zahl sein wird), und in Übereinstimmung mit (6) sei

$$Q_{\lambda}(a) = p_{\lambda} \quad (\lambda = 1, 2, \dots, n).$$

Die Differentialgleichung (1) nimmt dann folgende Form an:

$$(x-a)^n \frac{d^n y}{dx^n} + \frac{Q_1(x)}{(x-a)^k} (x-a)^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \frac{Q_2(x)}{(x-a)^{2k}} (x-a)^{n-2} \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \dots + \frac{Q_n(x)}{(x-a)^{nk}} y = 0.$$

Macht man die Substitution

$$1) \quad \frac{1}{(x-a)^k} = \xi,$$

wird für $p = 1, 2, 3, \dots$

$$(x-a)^p \frac{d^p y}{dx^p} = (-k)^p \xi^p \frac{d^p y}{d\xi^p} + \alpha_{p-1} \xi^{p-1} \frac{d^{p-1} y}{d\xi^{p-1}} + \dots + \alpha_{p,p-1} \xi \frac{dy}{d\xi},$$

wo die α_{pq} gewisse Konstanten sind, und die Differentialgleichung geht in leichter Rechnung über in:

$$2) \quad \frac{d^n y}{d\xi^n} + R_1(\xi) \frac{d^{n-1} y}{d\xi^{n-1}} + \dots + R_n(\xi) y = 0,$$

bei

$$3) \quad \lim_{|\xi|=\infty} R_{\lambda}(\xi) = \frac{p_{\lambda}}{(-k)^{\lambda}} \quad (\lambda = 1, 2, \dots, n)$$

Und zwar gilt, wenn in Übereinstimmung mit (3)

$$4) \quad x-a = |x-a| e^{i\vartheta}, \text{ also } \xi = |\xi| e^{-ik\vartheta}$$

gesetzt wird, die Beziehung (13) gleichmäßig für alle endlichen Werte von ϑ . Daher gibt es eine positive Zahl C derart, daß für genügend kleine $|x-a|$, d. h. nach (11) für genügend große $|\xi|$, etwa für $|\xi| \geq \xi_0$ die Ungleichung

$$5) \quad |R_{\lambda}(\xi)| < C \quad (\lambda = 1, 2, \dots, n; |\xi| \geq \xi_0)$$

6) Nun setzen wir:

$$y = y_1, \quad \frac{dy_1}{d\xi} = y_2, \quad \frac{dy_2}{d\xi} = y_3, \dots, \quad \frac{dy_{n-1}}{d\xi} = y_n,$$

wodurch (12) übergeht in:

$$(17) \quad \frac{dy_n}{d\xi} = -R_n(\xi)y_1 - R_{n-1}(\xi)y_2 - \dots - R_1(\xi)y_n.$$

Wegen (14) kann man das Gleichungssystem (16), (17) auch in folgender Form schreiben:

$$(18) \quad \frac{dy_\lambda}{d|\xi|} = e^{-ik\vartheta} y_{\lambda+1} \quad (\lambda = 1, 2, \dots, n-1),$$

$$(19) \quad \frac{dy_n}{d|\xi|} = -e^{-ik\vartheta} R_n(\xi)y_1 - e^{-ik\vartheta} R_{n-1}(\xi)y_2 - \dots - e^{-ik\vartheta} R_1(\xi)y_n.$$

Multipliziert man Gleichung (18) mit der zu y_λ konjugiert-komplexen Größe $\bar{y}_\lambda$ und nimmt dann beiderseits den reellen Teil, so erhält man für $\lambda = 1, 2, \dots, n-1$:

$$\frac{1}{2} \frac{d|y_\lambda|^2}{d|\xi|} = \Re \left(\bar{y}_\lambda \frac{dy_\lambda}{d|\xi|} \right) \leq \left| y_\lambda \frac{dy_\lambda}{d|\xi|} \right| = |y_\lambda y_{\lambda+1}| \leq \frac{1}{2} (|y_\lambda|^2 + |y_{\lambda+1}|^2).$$

Also durch Summation nach λ :

$$\begin{aligned} \frac{d(|y_1|^2 + |y_2|^2 + \dots + |y_{n-1}|^2)}{d|\xi|} &\leq |y_1|^2 + 2|y_2|^2 + \dots + 2|y_{n-1}|^2 + |y_n|^2 \\ &\leq 2(|y_1|^2 + |y_2|^2 + \dots + |y_n|^2). \end{aligned}$$

Multipliziert man auch (19) mit $2\bar{y}_n$, so ergibt sich, wenn $|\xi| \geq \xi_0$ angenommen wird, mit Rücksicht auf (15):

$$\begin{aligned} \frac{d|y_n|^2}{d|\xi|} &= 2\Re \left(\bar{y}_n \frac{dy_n}{d|\xi|} \right) \leq 2 \left| y_n \frac{dy_n}{d|\xi|} \right| \leq 2C(|y_n y_1| + |y_n y_2| + \dots + |y_n y_n|) \\ &\leq C[(|y_n|^2 + |y_1|^2) + (|y_n|^2 + |y_2|^2) + \dots + (|y_n|^2 + |y_n|^2)] \\ &= C(|y_1|^2 + |y_2|^2 + \dots + |y_n|^2) + nC|y_n|^2 \\ &\leq (C + nC)(|y_1|^2 + |y_2|^2 + \dots + |y_n|^2). \end{aligned}$$

Addiert man diese Ungleichung zur vorigen, so erhält man:

$$\frac{d(|y_1|^2 + |y_2|^2 + \dots + |y_n|^2)}{d|\xi|} \leq (2 + C + nC)(|y_1|^2 + |y_2|^2 + \dots + |y_n|^2).$$

Hieraus folgt durch Integration:

$$(20) \quad \begin{aligned} &|y_1|^2 + |y_2|^2 + \dots + |y_n|^2 \\ &\leq (|y_1|^2 + |y_2|^2 + \dots + |y_n|^2)_{|\xi|=\xi_0} \cdot e^{(2+C+nC)(|\xi|-\xi_0)}. \end{aligned}$$

Sofern aber der Winkel ϑ in (14) zwischen endlichen Schranken bleibt, wird auch der Ausdruck

$$(|y_1|^2 + |y_2|^2 + \dots + |y_n|^2)_{|\xi|=\xi_0}$$

erhalb einer von ϑ unabhängigen Schranke G bleiben. Aus (20) folgt insbesondere, weil $y_1 = y$ war,

$$|y|^2 \leq G e^{(3+C+nC)|\xi|} < e^{(3+C+nC)|\xi|},$$

ern nur $|\xi|$ genügend groß ist. Oder wenn man die Wurzel zieht und ξ den Wert aus (11) einsetzt:

$$|y| < e^{\frac{1}{2}(3+C+nC)} \left| \frac{1}{x-a} \right|^k.$$

Damit ist unsere Behauptung (5) bewiesen, und für K hat sich zunächst der Wert $K = \frac{1}{2}(3+C+nC)$ ergeben.

§ 3.

Wir wollen jetzt die Behauptung des § 1 nachweisen, daß stets

$$|y| < e^{\left(\frac{s}{k} + \varepsilon\right) \left| \frac{1}{x-a} \right|^k}$$

wenn nur $|x-a|$ unter eine genügend kleine Schranke herabsinkt. In einer früheren Arbeit von mir²⁾ läßt sich die Ungleichung (21) leicht nehmen in folgendem Sinne: Wenn x auf dem geradlinigen Strahl mit dem Richtungswinkel ϑ gegen a wandert, so gilt die Ungleichung (21), sobald $|x-a|$ unter eine Schranke η_ϑ herabsinkt. Diese wird aber von der Richtung ϑ abhängen, und wenn man unendlich viele Strahlen betrachtet, so ist nicht a priori klar, daß die Zahlen η_ϑ eine positive untere Schranke haben. Um daher (21) in vollem Umfang zu beweisen, können wir uns nicht einfach auf die a. a. O. gewonnenen Ergebnisse stützen, vielmehr ist es nötig, die ganze Beweiskette zu wiederholen und die erforderlichen Modifikationen anzubringen.

Wie in § 2 führen wir unsere Differentialgleichung (1) wieder über das folgende System (vgl. (18), (19)):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy_1}{d|\xi|} = e^{-ik\vartheta} y_2, \\ \dots \dots \dots \\ \frac{dy_{n-1}}{d|\xi|} = e^{-ik\vartheta} y_n, \\ \frac{dy_n}{d|\xi|} = -e^{-ik\vartheta} R_n(\xi) y_1 - \dots - e^{-ik\vartheta} R_1(\xi) y_n. \end{array} \right.$$

Nun führen wir die beiden n -reihigen Matrizes ein:

²⁾ Über lineare Differentialgleichungen, bei denen die unabhängig Variable reell ist. Zweite Mitteilung. Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 143.

$$F_{\xi} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -R_n & -R_{n-1} & -R_{n-2} & \dots & -R_1 \end{pmatrix},$$

$$(23) \quad A \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \frac{-p_n}{(-k)^n} & \frac{-p_{n-1}}{(-k)^{n-1}} & \frac{-p_{n-2}}{(-k)^{n-2}} & \dots & \frac{-p_1}{-k} \end{pmatrix}$$

Wegen (13) ist für alle endlichen Werte von ϑ gleichmäßig

$$(24) \quad \lim_{|\xi|=\infty} F_{\xi} = A,$$

und das System (22) läßt sich symbolisch folgendermaßen schreiben:

$$(25) \quad \left(\frac{dy_1}{d|\xi|}, \dots, \frac{dy_n}{d|\xi|} \right) = e^{-ik\vartheta} F_{\xi} (y_1, \dots, y_n).$$

Die charakteristische Gleichung der Matrix A lautet:

$$(26) \quad |E\varrho - A| \equiv \varrho^n - \frac{p_1}{k} \varrho^{n-1} + \frac{p_2}{k^2} \varrho^{n-2} - \dots + \frac{p_n}{(-k)^n} = 0.$$

Sind $-\frac{\sigma_1}{k}, -\frac{\sigma_2}{k}, \dots, -\frac{\sigma_n}{k}$ ihre Wurzeln, also $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ die Wurzeln der Gleichung

$$(27) \quad \sigma^n + p_1 \sigma^{n-1} + \dots + p_n = 0,$$

so gibt es bekanntlich eine Matrix

$$(28) \quad B \equiv \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

mit von Null verschiedener Determinante und derart, daß

$$(29) \quad B^{-1} A B = -\frac{1}{k} \begin{pmatrix} \sigma_1 & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ 0 & \sigma_2 & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_n \end{pmatrix}$$

ist, wo die $c_{\lambda\mu}$ gewisse Konstanten bedeuten. Wegen (24) ist dann

$$(30) \quad B^{-1} F_{\xi} B = -\frac{1}{k} \begin{pmatrix} \sigma_1 & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ 0 & \sigma_2 & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varphi_{11}(\xi) & \dots & \varphi_{1n}(\xi) \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{n1}(\xi) & \dots & \varphi_{nn}(\xi) \end{pmatrix},$$

bei für alle endlichen Werte ϑ gleichmäßig

$$1) \quad \lim_{|\xi|=\infty} \varphi_{\lambda\mu}(\xi) = 0$$

2. Hiernach gibt es zu jeder positiven Zahl δ eine Zahl ξ_δ derart, daß

$$2) \quad |\varphi_{\lambda\mu}(\xi)| < \delta \quad \text{für} \quad |\xi| \geq \xi_\delta$$

3. Wendet man nun die lineare Substitution

$$3) \quad (y_1, \dots, y_n) = B(z_1, \dots, z_n)$$

4. so geht das System (22), oder was dasselbe ist, (25) über in folgendes:

$$4) \quad \left(\frac{dz_1}{d|\xi|}, \dots, \frac{dz_n}{d|\xi|} \right) = e^{-ik\vartheta} B^{-1} F_\xi B(z_1, \dots, z_n),$$

5. oder nach (30) in unsymbolischer Form:

$$5) \quad \frac{dz_\lambda}{d|\xi|} = - \frac{\sigma_\lambda e^{-ik\vartheta}}{k} z_\lambda - \frac{e^{-ik\vartheta}}{k} \sum_{\mu=\lambda+1}^n c_{\lambda\mu} z_\mu + e^{-ik\vartheta} \sum_{\mu=1}^n \varphi_{\lambda\mu}(\xi) z_\mu.$$

Nun sei

$$6) \quad \text{Max}_{\lambda, \mu} |c_{\lambda\mu}| = c,$$

7. und in Übereinstimmung mit § 1

$$7) \quad \text{Max}(|\sigma_1|, |\sigma_2|, \dots, |\sigma_n|) = s.$$

Multipliziert man dann (35) mit $\bar{z}_\lambda$ und nimmt beiderseits den reellen Teil, so erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{|z_\lambda|^2}{|\xi|} &= - \frac{\Re(\sigma_\lambda e^{-ik\vartheta})}{k} |z_\lambda|^2 - \frac{1}{k} \sum_{\mu=\lambda+1}^n \Re(e^{-ik\vartheta} c_{\lambda\mu} \bar{z}_\lambda z_\mu) + \sum_{\mu=1}^n \Re(e^{-ik\vartheta} \varphi_{\lambda\mu} \bar{z}_\lambda z_\mu) \\ &\leq \frac{|\sigma_\lambda|}{k} |z_\lambda|^2 + \frac{1}{k} \sum_{\mu=\lambda+1}^n |c_{\lambda\mu} z_\lambda z_\mu| + \sum_{\mu=1}^n |\varphi_{\lambda\mu} z_\lambda z_\mu|, \end{aligned}$$

8. und folglich mit Rücksicht auf (37), (36) und (32):

$$8) \quad \frac{d|z_\lambda|^2}{d|\xi|} \leq \frac{2s}{k} |z_\lambda|^2 + \frac{2c}{k} \sum_{\mu=\lambda+1}^n |z_\lambda z_\mu| + 2\delta \sum_{\mu=1}^n |z_\lambda z_\mu| \quad \text{für} \quad |\xi| \geq \xi_\delta.$$

Bedeutet nun ε eine beliebig kleine positive Zahl, so kann man stets zwei positive Zahlen α und δ angeben derart, daß

$$9) \quad \alpha < 1, \quad \frac{2cn\alpha}{k} + \frac{2n\delta}{\alpha^n} < \varepsilon$$

10. Der so bestimmten Zahl δ ordnen wir gemäß (32) einen Wert ξ_δ zu. Ist dann $y_1, \dots, y_n$ irgendein Integralsystem von (22) und $z_1, \dots, z_n$ das transformierte Integralsystem von (35), so gilt sicher auch

die Ungleichung (38), und man kann eine Zahl H bestimmen derart, daß die Ungleichungen

$$(40) \quad |z_\lambda|^2 \leq H \alpha^{2\lambda} e^{\left(\frac{2s}{k} + \varepsilon\right)|\xi|} \quad (\lambda = 1, 2, \dots, n)$$

wenigstens für $|\xi| = \xi_\delta$ gelten. Man hat ja nur nötig,

$$\begin{aligned} H &= \max_{\lambda=1}^n \max_{|\xi|=\xi_\delta} |z_\lambda|^2 \alpha^{-2\lambda} e^{-\left(\frac{2s}{k} + \varepsilon\right)|\xi|} \\ &= e^{-\left(\frac{2s}{k} + \varepsilon\right)\xi_\delta} \max_{\lambda=1}^n \max_{|\xi|=\xi_\delta} \alpha^{-2\lambda} |z_\lambda|^2 \end{aligned}$$

zu setzen. Dieses Maximum ist nämlich sicher endlich, da wir in der Formel $\xi = |\xi| e^{-ik\vartheta}$ den Winkel ϑ auf ein endliches Intervall beschränken wollten.

Jetzt behaupten wir, daß die Ungleichung (40) auch für $|\xi| > \xi_\delta$ dauernd bestehen bleibt. Um das zu beweisen, betrachten wir einen beliebigen Strahl $\xi = |\xi| e^{-ik\vartheta}$ und nehmen an, daß auf ihm die fragliche Ungleichung nicht dauernd gelte. Dann sei $|\xi_2|$ die untere Grenze derjenigen Werte $|\xi| (> \xi_\delta)$, für die sie nicht gilt. Für $\xi = |\xi_2| e^{-ik\vartheta}$ ist dann

$$|z_\lambda|^2 \leq H \alpha^{2\lambda} e^{\left(\frac{2s}{k} + \varepsilon\right)|\xi_2|} \quad (\lambda = 1, 2, \dots, n),$$

und für mindestens einen Index ν

$$|z_\nu|^2 = H \alpha^{2\nu} e^{\left(\frac{2s}{k} + \varepsilon\right)|\xi_2|},$$

$$\frac{d|z_\nu|^2}{d|\xi|} \geq \frac{d}{d|\xi|} \left(H \alpha^{2\nu} e^{\left(\frac{2s}{k} + \varepsilon\right)|\xi|} \right)_{|\xi|=|\xi_2|} = H \alpha^{2\nu} \left(\frac{2s}{k} + \varepsilon \right) e^{\left(\frac{2s}{k} + \varepsilon\right)|\xi_2|}.$$

Setzt man das in die für $\lambda = \nu$ gebildete Ungleichung (38) ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} H \alpha^{2\nu} \left(\frac{2s}{k} + \varepsilon \right) e^{\left(\frac{2s}{k} + \varepsilon\right)|\xi_2|} &\leq \frac{2s}{k} H \alpha^{2\nu} e^{\left(\frac{2s}{k} + \varepsilon\right)|\xi_2|} + \frac{2c}{k} \sum_{\mu=\nu+1}^n H \alpha^{\nu+\mu} e^{\left(\frac{2s}{k} + \varepsilon\right)|\xi_2|} \\ &\quad + 2\delta \sum_{\mu=1}^n H \alpha^{\nu+\mu} e^{\left(\frac{2s}{k} + \varepsilon\right)|\xi_2|}, \end{aligned}$$

oder einfacher, und weil $\alpha < 1$ sein sollte,

$$\frac{2s}{k} + \varepsilon \leq \frac{2s}{k} + \frac{2c}{k} n \alpha + 2\delta \frac{n}{\alpha^n}.$$

Das steht aber im Widerspruch mit (39), und damit ist bewiesen, daß die Ungleichung (40) in der Tat für $|\xi| > \xi_\delta$ dauernd richtig ist.

Geht man von dem Integralsystem z_i vermöge (33) wieder zu y_i über, so folgt aus (40) insbesondere auch:

$$|y_1| < H' e^{\left(\frac{s}{k} + \frac{\varepsilon}{2}\right)|\xi|} \quad \text{für } |\xi| \geq \xi_\delta,$$

Da H' eine Konstante ist. Da für genügend große Werte von $|\xi|$ gewiß auch $H' < e^{\frac{s}{2}|\xi|}$ sein wird, so folgt weiter:

$$|y_1| < e^{\left(\frac{s}{k} + \varepsilon\right)|\xi|}.$$

Damit ist, weil $y_1 = y$ und $\xi = \left(\frac{1}{x-a}\right)^k$ war, die Ungleichung (21) bewiesen, und sonach das oben bezeichnete Ziel des gegenwärtigen Paragraphen erreicht.

§ 4.

Nunmehr betrachten wir wieder die Differentialgleichung (12), die nach der Substitution (14) übergeht in folgende:

$$1) \quad \frac{d^n y}{d|\xi|^n} + e^{-ik\vartheta} R_1(\xi) \frac{d^{n-1} y}{d|\xi|^{n-1}} + \dots + e^{-nik\vartheta} R_n(\xi) y = 0.$$

Die Koeffizienten dieser Gleichung haben für $|\xi| \rightarrow \infty$ gewisse endliche Grenzwerte, die aus (13) zu ersehen sind, und die „charakteristische Gleichung“ lautet:

$$2) \quad \varrho^n - e^{-ik\vartheta} \frac{p_1}{k} \varrho^{n-1} + e^{-2ik\vartheta} \frac{p_2}{k^2} \varrho^{n-2} - \dots + (-1)^n e^{-nik\vartheta} \frac{p_n}{k^n} = 0.$$

Die Wurzeln sind unter Beibehaltung unserer früheren Bezeichnung

$$3) \quad -\frac{\sigma_1}{k} e^{-ik\vartheta}, \quad -\frac{\sigma_2}{k} e^{-ik\vartheta}, \dots, -\frac{\sigma_n}{k} e^{-ik\vartheta}.$$

Nach (37) ist für einen gewissen Index λ

$$|\sigma_\lambda| = s.$$

Wenn dann

$$\sigma_\lambda = s e^{i\varphi}$$

so betrachten wir speziell den Strahl mit dem Richtungswinkel

$$4) \quad \vartheta = \frac{(2m+1)\pi + \varphi}{k},$$

wobei m eine ganze Zahl ist. Diese läßt sich stets so wählen, daß die durch (4) definierte Zahl ϑ dem Intervall angehört, in welchem wir seither ϑ wählen dachten, vorausgesetzt, daß dieses Intervall mindestens die Länge $\frac{s}{k}$ hat. Unter den Zahlen (43) kommt, wenn für ϑ der Wert (44) gewählt wird, die positive Zahl $\frac{s}{k}$ vor, während alle anderen absolut $\leq \frac{s}{k}$ sind.

Wenn wir daher die Variabeln

$$x = a + |x - a| e^{i\vartheta}, \quad \xi = |\xi| e^{-ik\vartheta}$$

auf die durch (44) charakterisierten Strahlen beschränken, so lehrt der Satz 8 meiner oben erwähnten Arbeit, daß für gewisse Integrale von (41) ja sogar für jedes Integral mit Ausnahme einer höchstens $(n-1)$ -gliedrige linearen Schar von Partikulärintegralen, die folgende Ungleichung gilt:

$$(45) \quad |y| + \left| \frac{dy}{d|\xi|} \right| + \dots + \left| \frac{d^{n-1}y}{d|\xi|^{n-1}} \right| > e^{\left(\frac{s}{k} - \varepsilon\right)|\xi|}.$$

Das heißt, wie klein auch die positive Zahl ε sei, so ist doch die Ungleichung (45) für genügend große Werte von $|\xi|$ richtig. Nun ist aber

$$\left| \frac{d^p y}{d|\xi|^p} \right| = \left| e^{pik\vartheta} \frac{d^p y}{d|\xi|^p} \right| = \left| \frac{d^p y}{d\xi^p} \right|.$$

Wir können daher statt (45), wenn wir noch ε durch $\frac{\varepsilon}{2}$ ersetzen, auch folgendes schreiben:

$$(46) \quad |y| + \left| \frac{dy}{d\xi} \right| + \dots + \left| \frac{d^{n-1}y}{d\xi^{n-1}} \right| > e^{\left(\frac{s}{k} - \frac{\varepsilon}{2}\right)|\xi|}.$$

Nun soll gezeigt werden, daß die Ungleichung

$$|y| < e^{\left(\frac{s}{k} - \varepsilon\right)\left|\frac{1}{x-a}\right|^k} = e^{\left(\frac{s}{k} - \varepsilon\right)|\xi|}$$

nicht für alle hinreichend großen Werte von $|\xi|$, d. h. nicht für alle x in einer gewissen Umgebung der Stelle a richtig ist. Andernfalls wäre nämlich nach dem Cauchyschen Satz, wenn man y als Funktion von ξ betrachtet,

$$\frac{d^p y(\xi)}{d\xi^p} = \frac{p!}{2\pi i} \int \frac{y(\zeta)}{(\zeta - \xi)^{p+1}} d\zeta,$$

wo das Integral etwa auf einem Kreis vom Radius ϱ um den Mittelpunkt ξ herumgeführt wird. Also

$$\left| \frac{d^p y(\xi)}{d\xi^p} \right| \leq \frac{p!}{2\pi} \int \frac{e^{\left(\frac{s}{k} - \varepsilon\right)(|\xi| + \varrho)}}{\varrho^{p+1}} d|\zeta| = \frac{p!}{\varrho^p} e^{\left(\frac{s}{k} - \varepsilon\right)(|\xi| + \varrho)}.$$

Wählt man für den Radius ϱ den Wert

$$\varrho = \frac{\varepsilon}{2} \frac{|\xi|}{\frac{s}{k} - \varepsilon},$$

so ergibt sich insbesondere:

$$\left| \frac{d^p y(\xi)}{d\xi^p} \right| \leq p! \left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^p \left(\frac{s}{k} - \varepsilon\right)^p \frac{1}{|\xi|^p} e^{\left(\frac{s}{k} - \frac{\varepsilon}{2}\right)|\xi|} < \frac{1}{n} e^{\left(\frac{s}{k} - \frac{\varepsilon}{2}\right)|\xi|},$$

ald nur $|\xi|$ genügend groß wird. Daher wäre

$$\left|1 + \left|\frac{dy}{d\xi}\right| + \dots + \left|\frac{d^{n-1}y}{d\xi^{n-1}}\right|\right| < e^{\left(\frac{s}{k} - \varepsilon\right)|\xi|} + \frac{n-1}{n} e^{\left(\frac{s}{k} - \frac{\varepsilon}{2}\right)|\xi|} < e^{\left(\frac{s}{k} - \frac{\varepsilon}{2}\right)|\xi|}$$

genügend große Werte von $|\xi|$. Diese Ungleichung ist aber wegen
) zumindest auf dem durch (44) charakterisierten Strahl falsch. Unsere
annahme führt also zu einem Widerspruch, womit auch die letzte in § 1
gestellte Behauptung bewiesen ist.

(Eingegangen am 23. Oktober 1918.)

Bemerkung zu der Abhandlung:
„Untersuchungen über die Gleichgewichtsfiguren rotie-
render Flüssigkeiten, deren Teilchen einander nach dem
Newtonschen Gesetze anziehen“¹⁾.

Von

Leon Lichtenstein in Berlin.

Der Zweck der folgenden Zeilen ist, eine in meiner obigen Abhandlung gebliebene Lücke auszufüllen. In § 3 des zweiten Kapitels wird aus der Funktionenfolge ζ_n eine Teilfolge ζ_{n_2} extrahiert, so daß ζ_{n_2} , $\frac{\partial \zeta_{n_2}}{\partial \xi}$, $\frac{\partial \zeta_{n_2}}{\partial \eta}$ für alle (ξ, η) auf S und alle $|\lambda|, |s| \leq \delta^{(1)} < \delta^{(0)}$ gleichmäßig konvergieren (S. 256). Die Grenzfunktion ζ ist nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetig. Aus der Formel (53) II auf S. 258 wird für $n \rightarrow \infty$ geschlossen, daß ζ der Integro-Differentialgleichung (14) II genügt. In der Formel (53) II muß indessen statt $\Pi\{\lambda, s, \zeta_{n_2}\}$ rechterhand $\Pi\{\lambda, s, \zeta_{n_2-1}\}$ stehen, weshalb der obige Schluß nicht zwingend erscheint. Die Lücke ist in wenigen Zeilen ausgefüllt. Es gilt (S. 252)

$$(A) \quad \psi \zeta_n + \int_S N \zeta'_n d\sigma' = \Pi\{\lambda, s, \zeta_{n-1}\}$$

$$= s - R^2 \lambda - \frac{\omega^2}{2\pi f} (a^2 + b^2) \zeta_{n-1}^2 - 2R\tau \lambda \zeta_{n-1} - (a^2 + b^2) \lambda \zeta_{n-1}^2 - \Psi(\zeta_{n-1}),$$

demnach, $\zeta_{n+1} - \zeta_n = \tilde{\zeta}_n$ gesetzt,

$$(B) \quad \psi \tilde{\zeta}_n + \int_S N \tilde{\zeta}'_n d\sigma' = -\frac{\omega^2}{2\pi f} (a^2 + b^2) (\zeta_{n-1} + \zeta_n) \tilde{\zeta}_{n-1} - 2R\tau \lambda \tilde{\zeta}_{n-1}$$

$$- (a^2 + b^2) \lambda (\zeta_{n-1} + \zeta_n) \tilde{\zeta}_{n-1} - [\Psi(\zeta_n) - \Psi(\zeta_{n-1})] = \Theta_{n-1}$$

$$- [\Psi(\zeta_n) - \Psi(\zeta_{n-1})].$$

Es sei Ω_n der größte der drei Werte

$$(C) \quad \text{Max } |\tilde{\zeta}_n|, \quad \text{Max } \left| \frac{\partial \tilde{\zeta}}{\partial \xi} \right|, \quad \text{Max } \left| \frac{\partial \tilde{\zeta}}{\partial \eta} \right|.$$

¹⁾ Vgl. Mathematische Zeitschrift 1 (1918), S. 229–284.

Wegen (40) II S. 255 ist

$$| \Theta_{n-1} |, \left| \frac{\partial}{\partial \xi} \Theta_{n-1} \right|, \left| \frac{\partial}{\partial \eta} \Theta_{n-1} \right| < (\beta_1 \varepsilon^* + \beta_2 \delta^{(0)} + \beta_3 \delta^{(0)} \varepsilon^*) \Omega_{n-1}.$$

$$(\beta_1, \beta_2, \beta_3 \text{ konstant})$$

aus dem in § 3 des fünften Kapitels (S. 282–284) abgeleiteten Hilfssatz folgt wegen (40) II

$$| \Psi(\zeta_n) - \Psi(\zeta_{n-1}) |, \left| \frac{\partial}{\partial \xi} [\Psi(\zeta_n) - \Psi(\zeta_{n-1})] \right|,$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial \eta} [\Psi(\zeta_n) - \Psi(\zeta_{n-1})] \right| < \beta_4 \varepsilon^* \Omega_{n-1} \quad (\beta_4 \text{ konstant}).$$

aus (B) folgt den Betrachtungen des § 2 des zweiten Kapitels gemäß

$$\Omega_n < (\beta_5 \varepsilon^* + \beta_6 \delta^{(0)} + \beta_7 \delta^{(0)} \varepsilon^*) \Omega_{n-1} \quad (\beta_5, \beta_6, \beta_7 \text{ konstant}).$$

Man kann nun ε^* und $\delta^{(0)}$ so klein wählen, daß $\beta_5 \varepsilon^* + \beta_6 \delta^{(0)} + \beta_7 \delta^{(0)} \varepsilon^* < 1$ wird. Für alle hinreichend kleinen $|s|$, $|\lambda|$ konvergieren darum die unendlichen Reihen

$$\zeta_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\zeta}_n, \quad \frac{\partial \zeta_1}{\partial \xi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial \tilde{\zeta}_n}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial \zeta_1}{\partial \eta} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial \tilde{\zeta}_n}{\partial \eta}$$

geometrische Reihen. Die Folge ζ_n ($n=1, 2, \dots$) konvergiert gleichmäßig. Die Funktion $\zeta = \lim_{n=\infty} \zeta_n$ hat stetige partielle Ableitungen erster Ordnung, darum den Betrachtungen des vierten Kapitels gemäß auch die Ableitungen aller Ordnungen.

Wie ich mittlerweile erkannt habe, lassen sich die Überlegungen meiner Arbeit an verschiedenen Stellen erheblich vereinfachen. Ich werde darum in einer demnächst erscheinenden zweiten Abhandlung, die Stabilitätsbetrachtungen gewidmet ist, die Ergebnisse der ersten Arbeit noch einmal kurz im Zusammenhang darstellen.

Ich habe a. a. O. die Vermutung ausgesprochen, daß jede Gleichgewichtsfigur eine auf der Rotationsachse senkrechte Symmetrieebene sowie eine weitere Symmetrieebene durch die Achse hat. Die Existenz der zuerst genannten Symmetrieebene habe ich seitdem beweisen können²⁾. Ich habe aber als wahrscheinlich hingestellt, daß, wenn der Verzweigungsfall vorliegt (Kapitel III, § 4, S. 268), stets ein vollständiges System der Null-

²⁾ Vgl. L. Lichtenstein, Über einige Eigenschaften der Gleichgewichtsfiguren rotierender homogener Flüssigkeiten, deren Teilchen einander nach dem Newtonschen Gesetz anziehen, Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften (1918), S. 1120–1135.

lösungen der Integralgleichung (1) III gefunden werden kann, die in bezug auf die Ebenen $y = 0$ und $z = 0$ symmetrisch sind. Diese Vermutung trifft nicht zu. Wie ich in der zweiten Abhandlung beweisen werden können bei Rotationsfiguren Paare von Eigenfunktionen von der Form $F_1(\vartheta) \cos k \vartheta$, $F_1(\vartheta) \sin k \vartheta$ auftreten. Hier bezeichnet ϑ die Bogenlänge der Meridiankurve, ϑ den Azimutwinkel, k eine ganze positive Zahl.

(Eingegangen am 8. Januar 1919.)

Über eine Vertiefung des Picardschen Satzes bei ganzen Funktionen endlicher Ordnung.

Von

Ludwig Bieberbach in Frankfurt a. M.

1. Die Ergebnisse, welche ich kürzlich¹⁾ über schlichte Abbildungen in Winklräumen durch ganze Funktionen endlicher Ordnung erhalten habe, legten mir die Frage nahe, ob nicht im Gebiete des Picardschen Satzes Ähnliches gelten möchte. Zunächst war ja die Beobachtung, daß ganze rationale Funktionen eines jeden Grades gibt, deren sämtliche Null- und Einsstellen der negativen reellen Achse angehören, etwas entsetzend. Aber bei weiterem Zusehen erkannte ich doch, daß ähnlich auch bei der Frage der schlichten Abbildung von der Ordnung $\frac{1}{2}$ an die ganzen Funktionen endlicher Ordnung schon in gewissen von der Vollebene verschiedenen Winklräumen alle Werte mit höchstens einer Ausnahme endlich oft annehmen. Für Ordnungen ϱ zwischen $\frac{1}{2}$ und 1 hat sich eine Maximalöffnung eines von Null- und Einswerten freien Winkelraumes zu π ergeben, während jede Funktion einer Ordnung $\varrho > 1$ in jedem Winkelraum, dessen Öffnung $(2 - \frac{1}{\varrho})\pi$ übersteigt, höchstens einen Wert auslassen kann. Die hier angegebenen Schranken für die Öffnungen der Winkelräume wiesen sich zudem als die genauen. Es gibt also ganze Funktionen, die gerade in den angegebenen Winklräumen zwei Werte auslassen.

2. Herr P. Lévy²⁾ hat folgende scharfe Fassung eines bekannten Pothtkyschen Satzes gefunden:

Wenn $f(\zeta) = a_0 + a_1\zeta + a_2\zeta^2 + \dots$ für $|\zeta| < 1$ regulär ist und in diesem Kreise die Werte Null und Eins ausläßt, so gilt

$$|\log f(\zeta)| < \frac{\kappa(a_0)}{1 - |\zeta|},$$

¹⁾ L. Bieberbach, Zwei Sätze über das Verhalten analytischer Funktionen in der Umgebung wesentlich singularer Stellen, Math. Zeitschrift 2 (1918), S. 158–170.

²⁾ P. Lévy, Remarques sur le théorème de M. Picard, Bull. de la soc. math. de France, Bd. 40 (1912), S. 25–39. insb. S. 30.

wo $\kappa(a_0)$ eine gewisse nur von a_0 abhängige, also für alle diese $f(\zeta)$ und alle ζ gleiche Zahl bedeutet³⁾.

Ganz analog wie in meiner in der Fußnote¹⁾ genannten Arbeit (vgl. § 2, S. 162—165) über die schlichte Abbildung von Winkelräumen durch ganze Funktionen schließt man hieraus:

Wenn $f(z)$ in einem Winkelraum $|\arg z| < \alpha \frac{\pi}{2}$ der Öffnung $\alpha\pi$ regulär ist und in ihm die Werte Null und Eins ausläßt, so gilt in jedem Teilwinkelraum $|\arg z| \leq \vartheta \frac{\pi}{2} < \alpha \frac{\pi}{2}$ für alle genügend großen $|z|$

$$|\log f(z)| < \kappa_1 |z|^{1/\alpha},$$

wobei $\kappa_1 = \kappa_1(\vartheta)$ eine von der Öffnung des Teilwinkelraumes und von der Funktion $f(z)$ in hier nicht näher zu erörternder Weise abhängige Zahl bedeutet.

Daraus ergibt sich, daß unter den gleichen Bedingungen

$$(1) \quad |f(z)| < e^{\kappa_1 |z|^{1/\alpha}}$$

gilt. Diese Ungleichheit gilt also für große $|z|$ in jedem Teilraum eines Winkels der Öffnung $\alpha\pi$, in welchem die daselbst reguläre Funktion die Werte Null und Eins ausläßt.

Man darf nun aber hieraus nicht schließen, daß *nur* bei ganzen Funktionen, deren Ordnung $\frac{1}{\alpha}$ nicht übersteigt, ein Winkel der Öffnung $\alpha\pi$ von Null- und Einsstellen frei sein kann. Vielmehr ist erst noch zu untersuchen, inwieweit eine Beschränkung des Wachstums einer ganzen Funktion in einem Winkel der Öffnung $\alpha\pi$ ihre Ordnung zu beeinflussen vermag. Ich will hier diese vielleicht auch an sich interessante Frage nur insoweit erörtern, als es für meine auf die Vertiefung des Picard'schen Satzes zielenden Zwecke erforderlich ist.

3. Es sei also $f(z)$ eine ganze Funktion der Ordnung $\varrho > \frac{1}{\alpha}$. Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt also von einem gewissen $|z|$ an

$$|f(z)| < e^{|z|^{\varrho+\varepsilon}}.$$

Ferner sei für $0 < \arg z < \vartheta \frac{\pi}{2}$ und für $2\pi - \vartheta \frac{\pi}{2} < \arg z < 2\pi$ ($\vartheta < \alpha$) die Ungleichung (1) erfüllt. Wird dann $z = re^{i\varphi}$ und $(-z)^{1/\alpha} = r^{1/\alpha} e^{i\frac{\varphi-\pi}{\alpha}}$ gesetzt für $0 < \varphi < 2\pi$, so gilt nach (1) für große $|z|$ auf den Geraden

³⁾ Herr Schottky hat in seiner berühmten Originalarbeit, Über den Picard'schen Satz und die Borelschen Ungleichungen, Sitzungsber. der Kgl. Preuß. Akad. d. Wiss. zu Berlin 1904, S. 1244—1262 (S. 1256) statt der ersten Potenz von $\frac{1}{1-|\zeta|}$ nur die vierte erhalten, ein Ergebnis, das für meine Zwecke noch zu schwach ist.

$$\varphi = \eta \frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad \varphi = 2\pi - \eta \frac{\pi}{2} \quad (0 < \eta < \vartheta)$$

$$|f(z)| < \left| e^{\frac{x_1}{\cos \frac{2-\eta}{\alpha} \frac{\pi}{2}} (-z)^{1/\alpha}} \right|$$

n, was zulässig ist, η so gewählt wird, daß $\cos \left(\frac{2-\eta}{\alpha} \frac{\pi}{2} \right) \neq 0$ ist. Ich wähle nun für $\eta \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq 2\pi - \eta \frac{\pi}{2}$ die Hilfsfunktion

$$F(z) = \frac{f(z)}{e^{\beta(-z)^{1/\alpha}}} \quad \left(\beta = \frac{x_1}{\cos \left(\frac{2-\eta}{\alpha} \frac{\pi}{2} \right)} \right).$$

Auf den Geraden $\varphi = \eta \frac{\pi}{2}$ und $\varphi = 2\pi - \eta \frac{\pi}{2}$ ist sie jedenfalls beschränkt. Denn auf diesen Geraden ist wegen (2)

$$|F(z)| < 1.$$

Im Winkelraum $\eta \frac{\pi}{2} < \varphi < 2\pi - \eta \frac{\pi}{2}$ dagegen ist jedenfalls

$$|e^{\beta(-z)^{1/\alpha}}| \geq e^{-|z|^{1/\alpha+\varepsilon}}$$

jedes positive ε von einem gewissen $|z|$ an. Denn es ist

$$|e^{\beta(-z)^{1/\alpha}} e^{|z|^{1/\alpha+\varepsilon}}| = e^{|z|^{1/\alpha} \left\{ |z|^{\varepsilon} + \beta \cos \frac{\varphi-\pi}{\alpha} \right\}},$$

hier strebt wegen $\varepsilon > 0$ die rechte Seite mit $|z|$ gegen unendlich. Hier wird

$$|F(z)| < e^{|z|^{1/\alpha+\varepsilon}} + |z|^{1/\alpha+\varepsilon}.$$

Die Funktion $F(z)$ hat also wegen $\varrho > \frac{1}{\infty}$ in $\eta \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq 2\pi - \eta \frac{\pi}{2}$ höchstens die Ordnung ϱ . Da sie aber, wie wir sahen, am Rande dieses Winkelraumes beschränkt ist, so ist sie nach einem Satze von Phragmén (Lindelöf⁴) auch im Inneren des Winkelraumes beschränkt, sobald $(2-\eta)\varrho < 1$ ist. Denn aus $|F(z)| < 1$ folgt $|f(z)| < e^{|\beta||z|^{1/\alpha}}$. Für $\eta \rightarrow \alpha$ geht hieraus, daß $f(z)$ durchweg von einer Ordnung wäre, die $\frac{1}{\alpha}$ nicht trifft. Daher muß $(2-\alpha)\varrho \geq 1$ sein. So haben wir den

⁴) E. Phragmén et E. Lindelöf, Sur une extension d'un principe classique d'analyse, Acta mathematica, Bd. 31 (1908), S. 381–408 (S. 385). Der Satz lautet: Wenn eine Funktion $f(z)$ in einem Winkelraum der Öffnung $\gamma\pi$ regulär und an seinem Rande beschränkt ist, wenn außerdem im Inneren des Winkelraumes $|e^{-|z|^\varrho} f(z)|$ beschränkt ist, während $\gamma\varrho < 1$ genügt, so liegt $|f(z)|$ auch im Inneren des Winkelraumes unterhalb derselben Schranke wie am Rande.

Satz I': Wenn eine ganze Funktion der Ordnung ϱ in einem Winkelraum der Öffnung $\alpha\pi$ von Null und Eins verschieden ist, so muß entweder $\varrho \leq \frac{1}{\alpha}$ oder $\varrho \geq \frac{1}{2-\alpha}$ sein.

Sie muß also in dem Restraum um so stärker wachsen, wenn sie in dem Winkel der Öffnung $\alpha\pi$ in ihrem Wachstum in der angegebenen Weise beschränkt sein soll.

Ich bringe die Kurven $\varrho = \frac{1}{\alpha}$ und $\varrho = \frac{1}{2-\alpha}$ in der Fig. 1 zur Anschauung und schraffiere die nach Satz I' in Betracht kommenden ϱ -Werte. Halbebenen und kleinere Winkelräume können also bei allen Ordnungen von Null- und Einsstellen frei bleiben, während größere Winkelräume nur bei gewissen aus der Figur ersichtlichen Ordnungen frei bleiben können. Die folgende Fig. 2 bringt noch die zu jeder Ordnung ϱ gehörige Maximalöffnung eines von Null- und Einsstellen freien Winkelraumes zur Anschauung. Da

$$f(z) = \frac{\varphi(z) - \alpha}{\beta - \alpha}$$

die Werte Null und Eins ausläßt, wenn $\varphi(z)$ die α und β meidet, da $f(z)$ ferner dieselbe Ordnung wie $\varphi(z)$ besitzt, so kann der Satz I' auch so ausgesprochen werden:

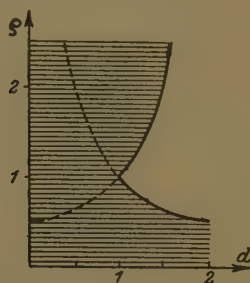


Fig. 1.

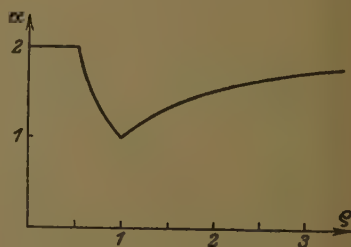


Fig. 2.

Satz I: Jede ganze Funktion der Ordnung ϱ nimmt für $\frac{1}{2} \leq \varrho \leq 1$ in jedem Winkelraum, dessen Öffnung $\frac{1}{\varrho}\pi$ übersteigt, für $\varrho \geq 1$ in jedem Winkelraum, dessen Öffnung $\pi(2 - \frac{1}{\varrho})$ übersteigt, alle Werte mit höchstens einer Ausnahme unendlich oft an.

Bemerkung: Die angestellten Überlegungen lassen sich sofort auf irgendwelche Funktionen übertragen, die in der Umgebung einer isolierten singulären Stelle von endlicher Ordnung sind.

4. Ich gehe nun zu der weiteren Frage über, ob die nach Satz I möglich erscheinenden Fälle der von Null- und Einsstellen freien Winkelräume wirklich eintreten. Bei der dazu nötigen Untersuchung leisten

der (wie a. a. O.¹⁾) die Mittag-Lefflerschen⁵⁾ Funktionen $E_\alpha(z)$ gute Dienste. Durch Funktionen, welche mit den $E_\alpha(z)$ nahe zusammenhängen, kann dies, wenn man will, den Untersuchungen von Wiman⁶⁾ entnommen. Da aber die dort gegebenen Beweise oft die wünschenswerten Lücken vermissen lassen und zudem das Resultat dort nicht unmittelbar abzulesen ist, ziehe ich es vor, in Anlehnung an die von Wiman verwendete Methode, meine Behauptungen ausführlich zu rechtfertigen.

5. Die Funktionen $E_\alpha(z)$ werden am besten durch die Integraldarstellung

$$E_\alpha(z) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\alpha} \int_S \frac{e^{\zeta^{1/\alpha}} d\zeta}{\zeta - z}$$

beschrieben. Als Integrationsweg ist dabei der in der Fig. 3 verzeichnete zu wählen; z liegt links von S . Im Integranden ist der auf der reellen positiven Achse positive Zweig $e^{\zeta^{1/\alpha}}$ zu nehmen. Aus dieser Integraldarstellung lassen sich alle Eigenschaften von $E_\alpha(z)$ leicht ablesen, so die Potenzreihenentwicklung

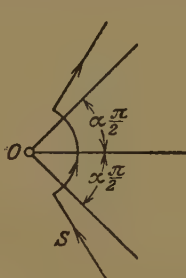


Fig. 3.

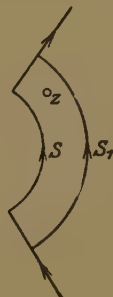


Fig. 4.

$$E_\alpha(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{\Gamma(1+\alpha\nu)}.$$

Also ist z. B.

$$E_1(z) = e^z \quad \text{und} \quad E_{\frac{1}{2}}(z) = \frac{1}{2} (e^{\sqrt{z}} + e^{-\sqrt{z}}).$$

Wir wollen uns aber fortan auf $0 < \alpha < 2$ beschränken.

Es möge zunächst das Verhalten von $E_\alpha(z)$ für $|\arg z| \leq \alpha \frac{\pi}{2}$ untersucht werden. Aus Fig. 4 liest man ab:

$$E_\alpha(z) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\alpha} \int_{S_1} \frac{e^{\zeta^{1/\alpha}} d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\alpha} \int_S \frac{e^{\zeta^{1/\alpha}} d\zeta}{\zeta - z} + \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\alpha} \int_{S_1-S} \frac{e^{\zeta^{1/\alpha}} d\zeta}{\zeta - z},$$

$$E_\alpha(z) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\alpha} \int_S \frac{e^{\zeta^{1/\alpha}} d\zeta}{\zeta - z} + \frac{1}{\alpha} e^{z^{1/\alpha}}.$$

⁵⁾ Mittag-Leffler, Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène (cinquième note), Acta mathematica, Bd. 29 (1904), S. 101–181 (132–137).

⁶⁾ A. Wiman, Über die Nullstellen der Funktionen $E_\alpha(x)$, Acta mathematica, Bd. 29 (1905), S. 217–234.

Daher wird

$$\left| E_\alpha(z) - \frac{1}{\alpha} e^{z^{1/\alpha}} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\alpha} \int_S \left| \frac{e^{z^{1/\alpha}} d\zeta}{\zeta - z} \right| = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\alpha} \int_S \frac{|e^{z^{1/\alpha}}| |d\zeta|}{|z| \left| 1 - \frac{\zeta}{z} \right|}.$$

Wenn aber ζ auf S liegt und z auf den Winkelraum $|\arg z| \leq \alpha$ rechts von S beschränkt ist und gleichzeitig einen nicht zu kleinen absoluten Betrag hat, so kann sich $\frac{\zeta}{z}$ nicht beliebig der 1 nähern. Da ferner auf den geradlinigen Teilen von S

$$|e^{z^{1/\alpha}}| = e^{\cos \frac{\varphi}{\alpha} |z|^{1/\alpha}} \rightarrow 0$$

strebt, wegen $|\arg \zeta| = |\varphi| > \alpha \frac{\pi}{2}$, so haben wir für den Winkelraum $|\arg z| \leq \alpha \frac{\pi}{2}$ von einem gewissen $|z| = R$ an:

$$(4) \quad \left| E_\alpha(z) - \frac{1}{\alpha} e^{z^{1/\alpha}} \right| \leq \frac{M}{|z|}.$$

Hier ist M eine passend gewählte positive Zahl. Man darf jedenfalls $R > 4M$ wählen.

Setzt man nun $z = |z| e^{i\varphi}$, so wird für $|\varphi| \leq \alpha \frac{\pi}{2}$

$$\left| \frac{1}{\alpha} e^{z^{1/\alpha}} \right| = \frac{1}{\alpha} e^{\cos \frac{\varphi}{\alpha} |z|^{1/\alpha}} \geq \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{2}.$$

Daher ist

$$(5) \quad \left| \frac{4}{\alpha} e^{z^{1/\alpha}} \right| > 2 \quad \text{und} \quad \left| \frac{4}{\alpha} e^{z^{1/\alpha}} - 1 \right| > 1 \quad \text{für} \quad |\varphi| \leq \alpha \frac{\pi}{2}.$$

Wähle ich nun aber $|z| > R$, so wird nach (4) in $|\varphi| \leq \alpha \frac{\pi}{2}$

$$(6) \quad \left| 4 E_\alpha(z) - \frac{4}{\alpha} e^{z^{1/\alpha}} \right| < 1.$$

In $|\varphi| \leq \alpha \frac{\pi}{2}$ wird daher nach (5) und (6)

$$|4 E_\alpha(z)| = \left| \frac{4}{\alpha} e^{z^{1/\alpha}} + \left(4 E_\alpha(z) - \frac{4}{\alpha} e^{z^{1/\alpha}} \right) \right| \geq \left| \frac{4}{\alpha} e^{z^{1/\alpha}} \right| - \left| 4 E_\alpha(z) - \frac{4}{\alpha} e^{z^{1/\alpha}} \right|$$

und

$$|4 E_\alpha(z) - 1| = \left| \left(\frac{4}{\alpha} e^{z^{1/\alpha}} - 1 \right) + \left(4 E_\alpha(z) - \frac{4}{\alpha} e^{z^{1/\alpha}} \right) \right| \geq \left| \frac{4}{\alpha} e^{z^{1/\alpha}} - 1 \right| - \left| 4 E_\alpha(z) - \frac{4}{\alpha} e^{z^{1/\alpha}} \right|$$

Also ist $4 E_\alpha(z)$ im Gebiete $|z| > 4M$, $|\arg z| \leq \alpha \frac{\pi}{2}$ von Null und Eins verschieden. Damit haben wir eine Funktion der Ordnung $\frac{1}{\alpha}$ gefunden ($\frac{1}{\alpha} > \frac{1}{2}$), die in einem Winkelraum der Öffnung $\alpha\pi$ die Werte Null und

ns ausläßt. Damit ist gezeigt, daß die in Satz I für $\frac{1}{2} < \varrho \leq 1$ gegebene Schranke die genaue ist. So haben wir den

Satz II': *Es gibt Funktionen der Ordnung ϱ ($\frac{1}{2} < \varrho \leq 1$), nämlich die Funktionen $4E_{1/\varrho}(z)$, die in einem Winkelraum der Öffnung $\frac{1}{\varrho}\pi$ auf seinem Rande die Werte Null und Eins auslassen.*

Für $\varrho > 1$ dagegen hat unsere Betrachtung noch nicht ergeben, daß die in Satz I genannte Schranke die genaue ist. In diesen Fällen werden wir die Antwort finden, wenn wir $E_\alpha(z)$ in demjenigen Winkelraum betrachten, welcher den eben herangezogenen zu 2π ergänzt. Das ist der Winkelraum, in welchem $E_\alpha(z)$ abnimmt, während es in dem eben betrachteten zunimmt. Für größere Winkelräume nämlich, welche den eben betrachteten enthalten, versagt unser Schluß, weil dann $E_\alpha(z)$ am Rande stärker abnimmt als $\frac{1}{z}$.

6. Es möge also nun $\alpha < 1$ und $|\arg z| > \alpha \frac{\pi}{2}$ sein. Weil

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\frac{1}{z} + \frac{\zeta}{(\zeta - z)z}$$

t, so hat man

$$E_\alpha(z) = -\frac{1}{\alpha} \frac{1}{z} \frac{1}{2\pi i} \int_S e^{\zeta^{1/\alpha}} d\zeta + \frac{1}{\alpha} \frac{1}{z} \frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{e^{\zeta^{1/\alpha}} \zeta d\zeta}{\zeta - z}.$$

un aber wird

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\alpha} \int_S e^{\zeta^{1/\alpha}} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{S'} e^\eta \eta^{\alpha-1} d\eta = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)},$$

($\eta = \zeta^{1/\alpha}$)

Daher wird in jedem Teilbereich des Abnahmerraumes der Funktion $E_\alpha(z)$, welcher zur Linken von S liegt,

$$E_\alpha(z) = -\frac{1}{z} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} + \frac{1}{\alpha} \frac{1}{z} \frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{e^{\zeta^{1/\alpha}} \zeta d\zeta}{\zeta - z}.$$

Also wird

$$\left| E_\alpha(z) + \frac{1}{z} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \right| \leq \frac{M}{|z|^2}.$$

Dabei hängt aber nun M von der Größe desjenigen Teilwinkelraumes des Abnahmerraumes ab, für welchen wir die Abschätzung vornehmen wollen; denn man muß ja S so verschieben, daß es denselben nicht trifft. M könnte also über alle Grenzen wachsen, wenn sich die Öffnung des Teilwinkelraumes dem Werte $(2-\alpha)\pi$ nähert. Die vorhin angewandte Schlußweise läßt also nun nur erkennen, daß es ganze Funktionen der Ordnung ϱ gibt, nämlich $E_{1/\varrho}(z) - 1$, welche in gewissen Winkelräumen, deren Öffnung

beliebig wenig von $(2 - \frac{1}{\rho})\pi$ abweicht, die Werte Null und Eins auslassen. Man wähle nur $|z|$ so groß, daß

$$\left| \frac{1}{z} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \right| < \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \frac{M}{|z|^2} < \frac{1}{2}$$

wird. Dann wird

$$|E_\alpha(z) - 1| = \left| \left(-1 - \frac{1}{z} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \right) + \left(E_\alpha(z) + \frac{1}{z} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \right) \right| > 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

und ebenso

$$|E_\alpha(z) - 2| > 1.$$

Die Funktionen $E_\alpha(z) - 1$ lassen also in gewissen zur negativen reellen Achse symmetrischen Winkelräumen, deren Öffnung beliebig wenig von $(2 - \alpha)\pi$ abweicht, die Werte Null und Eins aus.

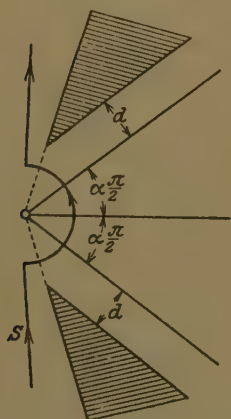


Fig. 5.

Die Überlegung zeigt aber noch nicht, daß diese Funktionen in gewissen Winkelräumen, deren Öffnung genau den Wert $(2 - \alpha)\pi$ hat, die Werte Null und Eins auslassen. Um das zu erkennen, muß man die eben verwendete Abschätzung noch verschärfen. Es kommt offenbar darauf an, zu zeigen, daß man d so wählen kann, daß $E_\alpha(z) - 1$ in zwei Winkelräumen von der Art der in Fig. 5 schraffierten die Werte Null und Eins meidet. Um das einzusehen, legen wir S so, wie es in der Fig. 5 angedeutet ist, und wollen d nun passend wählen. Wenn dann z einem der schraffierten Bereiche angehört, also rechts von S liegt, so tragen wir in (3)

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\frac{1}{z} + \frac{\zeta}{(\zeta - z)z}$$

ein und erhalten

$$E_\alpha(z) = \frac{1}{\alpha} e^{z^{1/\alpha}} - \frac{1}{z} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} + \frac{1}{\alpha} \frac{1}{z} \frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{e^{\zeta^{1/\alpha}} \zeta d\zeta}{\zeta - z}.$$

Also wird wie vorhin

$$\left| E_\alpha(z) - \frac{1}{\alpha} \left(e^{z^{1/\alpha}} + \frac{1}{z} \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \right) \right| \leq \frac{M}{|z|^2}.$$

Für $|z| > \sqrt{2M}$ ist also

$$\left| E_\alpha(z) - \frac{1}{\alpha} \left(e^{z^{1/\alpha}} - \frac{1}{z} \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \right) \right| < \frac{1}{2}.$$

Wir werden nachher zeigen, daß man die schraffierten Bereiche so wählen kann, daß darin

$$\left| \frac{1}{\alpha} \left(e^{z^{1/\alpha}} - \frac{1}{z} \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \right) \right| < \frac{1}{2}$$

bt. Setzt man außerdem noch $|z| > \sqrt{2M}$ voraus, so kann man wie n erkennen, daß $E_\alpha(z) - 1$ in den schraffierten Räumen die Werte 1 und Eins ausläßt. Denn es wird ja

$$\begin{aligned} |E_\alpha(z) - 1| &= \left| -1 + \frac{1}{\alpha} \left(e^{z^{1/\alpha}} - \frac{1}{z} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(E_\alpha(z) - \frac{1}{\alpha} \left(e^{z^{1/\alpha}} - \frac{1}{z} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \right) \right) \right| > 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} > 0. \end{aligned}$$

l ebenso wird

$$|E_\alpha(z) - 2| > 1.$$

Da aber die schraffierten Winkelräume die vorhin herangezogenen Winkelräume des Abnahmeraumes zum Teil überdecken, so haben den

Satz II": *Es gibt Funktionen einer jeden Ordnung $\varrho > 1$, nämlich Funktionen $E_{1/\varrho}(z) - 1$, welche in einem passend gewählten Winkelraum der Öffnung $(2 - \frac{1}{\varrho})\pi$ und auf seiner Grenze die Werte Null und ∞ auslassen.*

7. Alles kommt also darauf an, zu zeigen, daß für hinreichend kleine d in den schraffierten Bereichen der Fig. 5

$$\left| \frac{1}{\alpha} \left(e^{z^{1/\alpha}} - \frac{1}{z} \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \right) \right| < \frac{1}{2}$$

bt. Dies aber kann man wie folgt erkennen:

Wir hatten oben schon bemerkt, daß man denjenigen Zweig der Funktion $e^{z^{1/\alpha}}$ nehmen muß, welcher auf der positiven reellen Achse positiv ist. Derselbe ist also in der längs der negativen reellen Achse aufgeschnittenen z -Ebene eindeutig erklärt. Setzen wir

$$w = z^{1/\alpha},$$

geht vermöge der durch diese Funktion vermittelten Abbildung diese geschnittene z -Ebene, wegen $\alpha < 1$, in ein bei $w = 0$ gewundenes Riemannsches Flächenstück der Öffnung $\frac{2\pi}{\alpha}$ über. Dasselbe enthält also die volle w -Ebene, namentlich also auch die beiden in Fig. 6 schraffierten Quadranten, in welchen $\Re(w) < -\beta$ sei. Die Kurven

$$\Re(w) = -\beta, \quad \Im(w) > 0$$

$$\Re(w) = -\beta, \quad \Im(w) < 0$$

gehen bei der Abbildung $z = w^\alpha$ in zwei Kurven der z -Ebene über,

welche Asymptoten mit den Richtungen $\frac{\alpha\pi}{2}$ und $-\frac{\alpha\pi}{2}$ besitzen. Ich habe sie schematisch in Fig. 7 zusammen mit den Bildern der beiden schraffierten Quadranten dargestellt. In den schraffierten Bildern der beiden Quadranten ist nun jedenfalls

$$|e^{z^{1/\alpha}}| < e^{-\beta}.$$

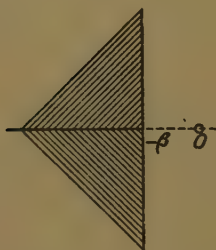


Fig. 6.

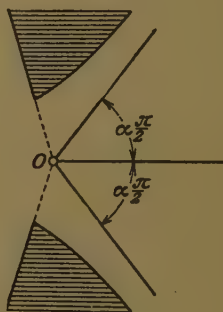


Fig. 7.

Das kann also durch hinreichend große Wahl von β kleiner als $\frac{\alpha}{4}$ gemacht werden. Wählt man also die in Fig. 5 schraffierten Bereiche so, daß sie den beiden schraffierten Quadrantenbildern angehören — dazu braucht man nur d hinreichend groß zu wählen —, so ist in denselben nun auch

$$\left| \frac{1}{\alpha} e^{z^{1/\alpha}} \right| < \frac{1}{4}.$$

Man kann nun aber β auch so groß wählen, daß in den Quadrantenbildern

$$\left| \frac{1}{\alpha} \frac{1}{z} \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \right| < \frac{1}{4}$$

wird.

Wählt man dann die schraffierten Bereiche der Fig. 5 so, daß sie den Quadrantenbildern angehören, so ist darin tatsächlich

$$\left| \frac{1}{\alpha} \left| e^{z^{1/\alpha}} - \frac{1}{z} \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \right| \right| < \frac{1}{2}.$$

Das war aber gerade noch zu beweisen, um Satz II'' voll zu begründen.

8. Nun bleiben noch die Ordnungen $\varrho \leq \frac{1}{2}$ zu betrachten. Für $\varrho = \frac{1}{2}$ kann man als Beispiel die Funktion

$$E_2(z) = \frac{1}{2}(e^{\sqrt{z}} + e^{-\sqrt{z}})$$

nehmen. Ihre Null- und Einsstellen gehören sämtlich der negativen reellen Achse an. Wenn nämlich

$$\frac{1}{2}(e^{\sqrt{z}} + e^{-\sqrt{z}}) = a$$

ein soll, so muß

$$e^{2\sqrt{z}} - 2ae^{\sqrt{z}} + 1 = 0,$$

also

$$e^{\sqrt{z}} = a \pm \sqrt{a^2 - 1}$$

ein. Für reelle a mit $|a| \leq 1$ sind dies aber komplexe Zahlen vom Betrage Eins. Also muß $\sqrt{z} = i\varphi$ also $z = -\varphi^2$ sein, wie wir beweisen wollten.

Wenn man nun versucht, auf dem bisher verfolgten Wege weiter zu gehen, um auch die Ordnungen $\varrho < \frac{1}{2}$ mit Hilfe der Funktionen $E_a(z)$ zu erledigen ($\alpha > 2$), so kommt man bald in große Weitläufigkeiten. Ich ziehe es daher vor, diese Fälle auf einem anderen wesentlich bequemeren Wege zu behandeln.

9. Mit $P_\varrho(z)$ will ich hier die folgende ganze Funktion der Ordnung $\frac{1}{\varrho}$ bezeichnen:

$$P_\varrho(z) = \prod_1^\infty \left(1 - \frac{z}{n^\varrho}\right).$$

Der Exponent ϱ soll dabei größer als Zwei sein. Ich will zunächst zeigen, daß die sämtlichen Extremwerte, welche diese Funktion für positive reelle z zwischen den verschiedenen Nullstellen n^ϱ annimmt, dem Betrage nach eine gewisse wesentlich positive Schranke überschreiten. Man kann dies allerdings den sehr eindringenden Abschätzungen dieser Funktion entnehmen, welche Hardy⁷⁾ gefunden hat. Da aber das eben angegebene Resultat wesentlich einfacher gewonnen werden kann, will ich es rasch herleiten. Ich betrachte dazu den Quotienten

$$\frac{P_\varrho(z)}{\sin \pi z^{1/\varrho}} = \frac{\prod_1^\infty \left(1 - \frac{z}{n^\varrho}\right)}{\pi z^{1/\varrho} \prod_1^\infty \left(1 - \frac{z^{2/\varrho}}{n^2}\right)}.$$

Hier ist stets für $z > 0$

$$\left|1 - \frac{z}{n^\varrho}\right| \geq \left|1 - \frac{z^{2/\varrho}}{n^2}\right|.$$

Denn sei 1) $z < n^\varrho$, so ist

$$\left|1 - \frac{z}{n^\varrho}\right| = 1 - \frac{z}{n^\varrho} \quad \text{und} \quad \left|1 - \frac{z^{2/\varrho}}{n^2}\right| = 1 - \frac{z^{2/\varrho}}{n^2}.$$

⁷⁾ Vgl. Hardy, On the function $P_\varrho(z)$, The quarterly Journal of pure and applied mathematics, Bd. 37 (1906), S. 146–172.

Ferner ist aber

$$\frac{z}{n^e} < \frac{z^{2/e}}{n^2}.$$

Denn aus $z < n^e$ folgt $z^{1-2/e} < n^{e-2}$.

Sei 2) $z = n^e$, so wird

$$\lim_{z \rightarrow n^e} \frac{1 - \frac{z}{n^e}}{1 - \frac{z^{2/e}}{n^2}} = \frac{e}{2} > 1$$

Sei (3) $z > n^e$, so wird

$$\left| 1 - \frac{z}{n^e} \right| = \frac{z}{n^e} - 1 \quad \text{und} \quad \left| 1 - \frac{z^{2/e}}{n^2} \right| = \frac{z^{2/e}}{n^2} - 1.$$

Ferner ist

$$\frac{z}{n^e} > \frac{z^{2/e}}{n^2}.$$

Denn aus

$$z > n^e \quad \text{folgt} \quad z^{1-2/e} > n^{e-2}.$$

Daher ist stets

$$\left| \frac{P_e(z)}{\sin \pi z^{1/e}} \right| > \frac{1}{\pi} z^{-1/e} \left| \frac{1-z}{1-z^{1/e}} \right| \left| \frac{1-\frac{z}{2^e}}{1-\frac{z^{1/e}}{2}} \right| \dots \left| \frac{1-\frac{z}{\kappa^e}}{1-\frac{z^{1/e}}{\kappa}} \right| \sim \frac{1}{\pi} 2^{2-e} \cdot 3^{2-e} \dots \kappa^{2-e} \cdot z^{\kappa-2}$$

wächst also mit z über alle Grenzen⁸⁾. Da aber zwischen je zwei Nullstellen von $\sin \pi z^{1/e}$ stets eine Stelle liegt, wo der absolute Betrag dieser Funktion gleich 1 wird, so wachsen die Extremalwerte von $P_e(z)$ über alle Grenzen. Namentlich liegen sie also alle oberhalb einer wesentlich positiven Schranke, wie wir beweisen wollten.

10. Auf dies Ergebnis gestützt, kann man nun leicht Funktionen einer jeden Ordnung $e \leq \frac{1}{2}$ konstruieren, deren sämtliche Null- und Einsstellen der positiven reellen Achse angehören. Ich will zunächst Polynome dieser Art bilden und betrachte dazu die Funktion

$$f_n(z) = 1 + \mu_n \left(1 - \frac{z}{a_1}\right) \left(1 - \frac{z}{a_2}\right) \dots \left(1 - \frac{z}{a_n}\right). \quad (0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n)$$

Ihre Einsstellen liegen alle auf der positiven reellen Achse. μ_n soll so bestimmt werden, daß auch die Nullstellen alle der positiven reellen Achse angehören. Ich betrachte dazu die Funktion

$$\varphi_n(z) = \left(1 - \frac{z}{a_1}\right) \left(1 - \frac{z}{a_2}\right) \dots \left(1 - \frac{z}{a_n}\right).$$

⁸⁾ Wegen $e > 2$ ist nämlich für hinreichend groß gewähltes κ : $(e-2)\kappa > 1$, also $\kappa - \frac{2\kappa+1}{e} > 0$.

ischen je zwei Nullstellen derselben liegen gewisse Maxima und Minima. werde dann so gewählt, daß für $\mu_n \varphi_n(z)$ die absoluten Beträge aller dieser Extreme die Eins übertreffen. Dann wird zwischen je zweien solchen Extremen jedenfalls mindestens eine Nullstelle von $f_n(z)$ liegen, da ja die Maxima von φ_n Werte von f_n über zwei, die Minima aber Werte unter 1 liefern. Den $n - 1$ Extremen entsprechend haben wir also jedenfalls $n - 2$ Nullstellen von $f_n(z)$ zwischen a_1 und a_n . Wähle ich nun noch μ_n so, was mit den bisherigen Bedingungen durchaus verträglich ist — μ_n so, daß $1 + \mu_n$ negativ wird, so ist für $z < 0$ erst recht $f_n(z) < 0$. Hier können also keine Nullstellen von $f_n(z)$ liegen, während eine weitere zwischen 0 und a_1 liegt, weil ja $f_n(a_1) = 1$ ist. So habe ich $n - 1$ reelle Nullstellen von $f_n(z)$. Daher muß auch die letzte reell und nach allem vorausgegangenen notwendig positiv sein.

Satz II''': *Es gibt Polynome eines jeden Grades, deren sämtliche Nullstellen der positiven reellen Achse angehören.*

11. Von diesen Polynomen ausgehend, kann man nun auch leicht ganze Funktionen einer jeden Ordnung $q < \frac{1}{2}$ konstruieren, deren Nullstellen ausschließlich der positiven reellen Achse angehören. Ich wähle dazu als Polynom $\varphi_n(z)$ zunächst den n -ten Abschnitt von $P_e(z)$, setze also

$$\varphi_n(z) = (1 - z) \left(1 - \frac{z}{2^e}\right) \dots \left(1 - \frac{z}{n^e}\right).$$

Dann bilde ich hiermit ein $f_n(z)$ und gehe mit n über alle Grenzen. Ich muß dazu nur noch zeigen, daß ich $\mu_n = \mu$ von n unabhängig wählen kann. Das lassen aber gerade die Ausführungen von Nr. 9 erkennen. Denn die Extreme von $P_e(z)$ sind dem Betrage nach kleiner als die im gleichen Intervalle $\kappa^e < z < (\kappa + 1)^e$ ($\kappa < n$) gelegenen Extreme von $\varphi_n(z)$. Überhaupt gilt ja für $z < n^e$

$$\varphi_n(z) > P_e(z).$$

Wenn für $z < n^e$, $h > 0$ ist ja $0 < 1 - \frac{z}{(n+h)^e} < 1$.

Wenn ich demnach μ so wähle, daß die Extreme von

$$\mu P_e(z)$$

dem Betrage nach die Eins übertreffen, so übertreffen auch die durchweg größeren Extreme von $\mu \varphi_n(z)$ alle dem Betrage nach die Eins. Wird dann noch μ so gewählt, daß $1 + \mu$ negativ ist, so liegen also alle Nullstellen und alle Einsstellen von

$$f_n(z) = 1 + \mu(1 - z) \left(1 - \frac{z}{2^e}\right) \dots \left(1 - \frac{z}{n^e}\right)$$

auf der positiven reellen Achse. Nun ist aber in jedem endlichen Teil der komplexen Ebene gleichmäßig

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = 1 + \mu P_2(z).$$

Nach dem Satz von Rouché⁹⁾ ergibt sich hieraus, daß auch alle Null- und Einsstellen von

$$1 + \mu P_2(z)$$

der positiven reellen Achse angehören.

12. Die eben verwendete Methode erlaubt es auch, Funktionen der Ordnung Null zu bilden, deren sämtliche Null- und Einsstellen auf der positiven reellen Achse liegen. Wir müssen dazu nur statt wie eben von $P_2(z)$ jetzt von

$$Q(z) = \prod_{n=1,2,\dots} \left(1 - \frac{z}{e^n}\right)$$

ausgehen. Wieder hat man zunächst zu zeigen, daß die zwischen positiven Nullstellen gelegenen Extreme dem Betrage nach oberhalb einer wesentlich positiven Schranke liegen. Dazu betrachtet man diesmal den Quotienten

$$\frac{Q(z)}{\sin(\pi \log z)} = \frac{\prod \left(1 - \frac{z}{e^n}\right)}{\pi \log z \prod \left(1 - \frac{(\log z)^2}{n^2}\right)}$$

und überzeugt sich, daß für $z > e^2$

$$\left| \frac{1 - \frac{z}{e^n}}{1 - \frac{(\log z)^2}{n^2}} \right| > 1$$

ist. Denn sei 1. $z < e^n$, so wird $1 - \frac{z}{e^n} > 1 - \frac{(\log z)^2}{n^2} > 0$. Denn es ist $\frac{z}{e^n} < \frac{(\log z)^2}{n^2}$, und dies folgt aus $\frac{z}{(\log z)^2} < \frac{e^n}{n^2}$. Die Ableitung von $\frac{z}{(\log z)^2}$ ist nämlich $\frac{\log z - 2}{(\log z)^3}$ und diese ist für $z > e^2$ positiv. Für solche z wächst also der Ausdruck, hat also für $z = e^n$ seinen größten Wert $\frac{e^n}{n^2}$. Für $z < e^n$ ist also wirklich

$$\frac{z}{(\log z)^2} < \frac{e^n}{n^2}.$$

⁹⁾ Dieser wichtige Satz lautet: Wenn $f(z)$ und $\varphi(z)$ zwei in einem abgeschlossenen Bereiche reguläre eindeutige Funktionen sind, und wenn am Rande desselben $|\varphi| < |f|$ ist, so hat $\varphi(z) + f(z)$ im Bereiche ebenso viele Nullstellen wie $f(z)$. Die hier in Betracht kommende Folgerung hat zuerst Herr Hurwitz (Math. Ann. 33 (1899), S. 247) aus dem Satz von Rouché gezogen. Vgl. auch meine Arbeit in dieser Zeitschrift Bd. 2 (1918), S. 158—170 (S. 167).

Ferner ist

$$\lim_{z \rightarrow e^n} \frac{1 - \frac{z}{e^n}}{1 - \frac{(\log z)^2}{n^2}} = \lim_{z \rightarrow e^n} \frac{z n^2}{2 e^n \log z} = \infty.$$

Endlich sei $z > e^n$. Dann wird

$$\frac{z}{e^n} - 1 > \frac{(\log z)^2}{n^2} - 1 > 0.$$

Wenn es ist $\frac{z}{e^n} > \frac{(\log z)^2}{n^2}$, weil $\frac{z}{(\log z)^2} > \frac{e^n}{n^2}$ ist. Die Ableitung von $\frac{z}{(\log z)^2}$ ist nämlich nach wie vor positiv, so daß $\frac{z}{(\log z)^2}$ für $z = e^n$ seinen kleinsten Wert $\frac{e^n}{n^2}$ hat.

Diese Überlegung zeigt nun wieder, daß für $z > e^2$

$$\left| \frac{Q(z)}{\sin(\pi \log z)} \right| > \frac{1}{\pi} \frac{1}{\log z} \left| \frac{1 - \frac{z}{e}}{1 - (\log z)^2} \right| \sim \frac{1}{\pi} \frac{1}{z} \frac{z}{(\log z)^2}.$$

Daraus folgt also wie vorhin, daß die absoluten Beträge der Extreme von $Q(z)$ tatsächlich alle oberhalb einer wesentlich positiven Schranke liegen. Das ermöglicht es aber nun, die Überlegungen von Nr. 11 zu wiederholen, und zu erkennen, daß man eine Zahl μ so wählen kann, daß sämtliche Null- und Einsstellen von

$$1 + \mu Q(z)$$

auf der positiven reellen Achse liegen.

Fassen wir also das Ergebnis der beiden letzten Nummern zusammen, haben wir den

Satz II''': Man kann Funktionen einer jeden Ordnung $0 \leq \varrho \leq \frac{1}{2}$ finden, deren sämtliche Null- und Einsstellen auf der positiven reellen Achse liegen.

Diese vier Sätze zusammen liefern nun die folgende Ergänzung zu Satz I:

Satz II: Polynome, ganze Funktionen der Ordnung Null und ganze Funktionen, deren Ordnung $\frac{1}{2}$ nicht übersteigt, können in beliebig großen Winkelräumen zwei Ausnahmewerte zulassen, derart, daß z. B. sämtliche Null- und Einsstellen der positiven reellen Achse angehören können.

Liegt die Ordnung ϱ einer ganzen Funktion zwischen $\frac{1}{2}$ und 1, so können passende Winkelräume der Öffnung $\frac{1}{\varrho} \pi$ einschließlich des Randes von Null- und Einsstellen frei bleiben. In jedem größeren Winkelraum

aber nehmen diese Funktionen alle Werte bis auf höchstens eine Ausnahme unendlich oft an. Wenn endlich die Ordnung der ganzen Funktionen größer oder gleich 1 ist, so können passende Winkelräume der Öffnung $(2 - \frac{1}{q})\pi$ einschließlich des Randes zwei oder mehr Ausnahmewerte zulassen¹⁰⁾. In jedem größeren Winkelraum aber werden wieder alle Werte mit höchstens einer Ausnahme unendlich oft angenommen.

¹⁰⁾ a. a. O. ¹⁾ habe ich gezeigt, daß diese Winkelräume schlicht abgebildet werden können, daß es also ganze Funktionen gibt, die darin keinen Wert mehr als einmal annehmen.

(Eingegangen am 7. August 1918.)

Die Entwicklung unstetiger Funktionen nach den Eigenfunktionen eines eindimensionalen Randwertproblems.

Von

Wolfgang Sternberg in Breslau.

Einleitung.

Eine der wichtigsten Aufgaben der mathematischen Physik, die mit der Methode der Integralgleichungen ihrer Lösung näher gebracht wird, ist die Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Systemen vorgeschriebener¹⁾, insbesondere nach solchen Funktionen, die als Eigenfunktionen eines symmetrischen Kerns einer Integralgleichung angesehen werden können. Während man nun für die Entwicklung von Funktionen einer Variablen, die eine genügende Anzahl stetiger Ableitungen besitzen und die Randbedingungen der Eigenfunktionen befriedigen, ganz allgemeine, einfach zu beweisende Sätze erhält, ist die Entwicklung unstetiger, den Randbedingungen nicht genügender Funktionen schwieriger und heutzutage nur mit Hilfe asymptotischer Darstellungen vollkommen durchführbar. Die Art der Randbedingungen, welche man behandeln kann, wird noch erweitert durch Einführung der „belasteten“ Integralgleichungen²⁾.

¹⁾ Vgl. W. Stekloff, *Problème de refroidissement d'une barre hétérogène*, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse (2) 3 (1901), S. 281–313; D. Hilbert, *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen*, zweite Mitteilung, *Göttinger Nachrichten* 1904, S. 213–259; E. Schmidt, *Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Systemen vorgeschriebener*, Inaugural-Dissertation, Göttingen 1905 oder *Math. Annalen* Bd. 63 (1907), S. 433–476; D. A. Westfall, *Zur Theorie der Integralgleichungen*, Inaugural-Dissertation, Göttingen 1905; A. Kneser, *Die Theorie der Integralgleichungen und die Darstellung willkürlicher Funktionen in der mathematischen Physik*, *Math. Annalen* 63 (1907), S. 477–524; L. Lichtenstein, *Zur Analysis der unendlich vielen Variablen. I. Entwicklungssätze der Theorie gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung*, *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo* 38 (1914), S. 113–166. Hier findet der Leser eine historische Einleitung mit ausführlichen Literaturangaben.

²⁾ Vgl. A. Kneser, *Belastete Integralgleichungen*, *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo* 37 (1914), S. 169–197.

In der vorliegenden Arbeit wird die Aufgabe der Entwicklung unstetiger Funktionen nach den Eigenfunktionen einer sich selbst adjungierten Differentialgleichung höherer Ordnung mit Randbedingungen, welche zur belasteten Orthogonalität führen, behandelt. Als Beispiel wählen wir die allgemeine sich selbst adjungierte Differentialgleichung 4. Ordnung; doch kann die Methode auch auf Gleichungen höherer Ordnung angewandt werden. In den letzten Paragraphen zeigen wir, wie weit man beim Entwicklungsproblem ohne asymptotische Darstellungen mit Hilfe eines Satzes von Weyl³⁾ gelangen kann.

§ 1.

Umformung der Differentialgleichung. Allgemeine Eigenschaften von Eigenfunktionen und Eigenwerten.

Es liege vor die Differentialgleichung 4. Ordnung⁴⁾:

$$(1) \quad (A_2(x) V''(x))'' + (A_1(x) V'(x))' + (A_0(x) - \Lambda) V(x) = 0,$$

worin $A_2(x)$ für $0 \leq x \leq 1$ positiv und viermal stetig differenzierbar, $A_1(x)$ einmal stetig differenzierbar, $A_0(x)$ stetig und Λ eine Konstante, der Eigenwert, ist. Mittels der simultanen Transformation

$$z = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt[4]{A_2(x)}}, \quad U(x) = V(x) \sqrt[8]{A_2(x)}$$

erhält man⁴⁾

$$(2) \quad U^{IV} + (B_1 U')' + (B_0 - \Lambda) U = 0.$$

Dabei ist, wenn man

$$\sqrt[8]{A_2(x)} = k(x)$$

setzt, so daß auch $k(x)$ eine für $0 \leq x \leq 1$ positive und viermal stetig differenzierbare Funktion bezeichnet,

$$B_1 = \frac{A_1}{k^4} - 6 k^3 k'' - 16 k^2 k'^2,$$

$$B_0 = A_0 - \frac{A_1}{k^2} \left(\frac{k^2}{2} \right)'' - \left(\frac{A_1}{k^3} \right)' k^2 k' - k^7 k^{IV} - 8 k^6 k' k''' \\ + 20 k^5 k'^2 k'' - 2 k^6 k''^2 + 40 k^4 k'^4.$$

Mithin ist B_1 einmal stetig differenzierbar, B_0 stetig.

³⁾ H. Weyl, Über die Konvergenz von Reihen, die nach Orthogonalfunktionen fortschreiten, Math. Annalen 67 (1909). S. 225–245.

⁴⁾ Die Differentiation nach x ist durch Striche angedeutet, ebenso die nach z .

Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß die transformierte Variable von 0 bis 1 geht, und wollen, da es auf die Bezeichnung nicht ankommt, wieder x statt z einführen.

Als Randbedingungen, die gleich für (2) formuliert werden, wählen wir

$$U|_0 = 0, \quad U'|_0 = 0; \quad U'|_1 = 0, \quad U''' + (H + \Lambda M)U|_1 = 0,$$

wo H eine beliebige reelle, M eine nicht negative Konstante ist. Die Greensche Formel liefert, wenn man zur Abkürzung

$$U^{IV} + (B_1 U')' + B_0 U \equiv L(U)$$

setzt und irgend zwei bezüglich zu Λ_n, Λ_m gehörige, den Randbedingungen genügende Lösungen von (2) mit U_n, U_m bezeichnet,

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \{U_n L(U_m) - U_m L(U_n)\} dx \\ &= U_n [U_m''' + B_1 U_m'] - U_m [U_n''' + B_1 U_n'] - (U_n' U_m'' - U_m' U_n'')|_0^1 \\ &= (\Lambda_n - \Lambda_m) M U_n U_m|_1 = (\Lambda_m - \Lambda_n) \int_0^1 U_n U_m dx, \end{aligned}$$

folglich

$$\int_0^1 U_n U_m dx + M U_n U_m|_1 = 0 \quad \text{für } n \neq m.$$

Diese Gleichung stellt bekanntlich die Eigenschaft der belasteten oder gewöhnlichen Orthogonalität dar, je nachdem $M > 0$ oder $M = 0$ ist. Die Funktionen $U_n(x)$ [$n = 1, 2, 3, \dots$] sind, wie sich zeigen läßt, die Lösungen der belasteten oder gewöhnlichen Integralgleichung mit symmetrischem Kern, die Zahlen Λ_n die Eigenwerte dieses Kerns. Demnach sind alle Λ_n , die ebenfalls aus der Theorie der Integralgleichungen als bekannt vorausgesetzt wird, reell. Daß sie auch positiv sein müssen, ergibt sich unter einer bestimmten Voraussetzung über $B_1(x)$ und H folgendermaßen. Zunächst kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $B_0(x)$ für $0 \leq x \leq 1$ positiv ist. Denn andernfalls setzt man

$$B_0 - \Lambda = \bar{B}_0 - \bar{\Lambda},$$

so

$$\bar{B}_0 = B_0 + c, \quad \bar{\Lambda} = \Lambda + c$$

und wählt die positive Konstante c so groß, daß ständig $\bar{B}_0(x) > 0$ ist, und führt wieder die alten Bezeichnungen ein. Nun ergibt partielle Integration bei Berücksichtigung von (2)

$$\begin{aligned} \int_0^1 U [U^{IV} + (B_1 U')'] dx &= B_1 U U' + U U''' - U' U''|_0^1 \\ &+ \int_0^1 (U''^2 - B_1 U'^2) dx = \int_0^1 U^2 (-B_0 + \Lambda) dx. \end{aligned}$$

Die Benutzung der gegebenen Randbedingungen liefert

$$B_1 U U' + U U''' - U' U'' \Big|_0^1 = -U^2 (H + \Lambda M) \Big|_1^1$$

Mithin wird

$$\Lambda \left\{ \int_0^1 U^2 dx + M U^2(1) \right\} = -H U^2(1) + \int_0^1 (U'''^2 - B_1 U'^2 + B_0 U^2) dx$$

Macht man jetzt die in den physikalischen Anwendungen bei den elastischen Transversalschwingungen eines dünnen Stabes tatsächlich erfüllten Voraussetzungen, daß $H \leq 0$ und für $0 \leq x \leq 1$ auch $B_1(x) \leq 0$ ist, so sind die rechte Seite der letzten Gleichung und der Faktor von Λ , mit hin auch Λ selbst positiv. Im folgenden bezeichnen wir die positive vierte Wurzel aus Λ mit ϱ und untersuchen das Verhalten der Eigenfunktion für große Werte von ϱ .

§ 2.

Asymptotische Darstellung der Eigenfunktionen.

Wir schreiben jetzt (2) in der Form

$$(2^+) \quad U^{IV} - \varrho^4 U = -(B_1 U')' - B_0 U \equiv p$$

und sehen für einen Augenblick p als bekannte Funktion an. Dann ist (2⁺) eine lineare inhomogene Differentialgleichung, deren allgemeines Integral durch die Methode der Variation der Konstanten aus dem der zugehörigen homogenen Gleichung gefunden wird. Man erhält⁵⁾

$$(4) \quad \begin{aligned} U(x) = & C_1 \sin \varrho x + C_2 \cos \varrho x + C_3 \operatorname{Sin} \varrho x + C_4 \operatorname{Cos} \varrho x \\ & + \frac{1}{2\varrho^3} \left\{ \cos \varrho x \int_0^x p(z) \sin \varrho z dz - \sin \varrho x \int_0^x p(z) \cos \varrho z dz \right. \\ & \left. + \operatorname{Sin} \varrho x \int_0^x p(z) \operatorname{Cos} \varrho z dz - \operatorname{Cos} \varrho x \int_0^x p(z) \operatorname{Sin} \varrho z dz \right\}. \end{aligned}$$

Für die Ableitungen ergibt sich

$$(4^+) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{U'(x)}{\varrho} = & C_1 \cos \varrho x - C_2 \sin \varrho x + C_3 \operatorname{Cos} \varrho x + C_4 \operatorname{Sin} \varrho x \\ & + \frac{1}{2\varrho^3} \left\{ -\sin \varrho x \int_0^x p(z) \sin \varrho z dz - \cos \varrho x \int_0^x p(z) \cos \varrho z dz \right. \\ & \left. + \operatorname{Cos} \varrho x \int_0^x p(z) \operatorname{Cos} \varrho z dz - \operatorname{Sin} \varrho x \int_0^x p(z) \operatorname{Sin} \varrho z dz \right\}, \end{aligned} \right.$$

⁵⁾ Vgl. E. Hilb, Über Reihenentwicklungen, welche aus speziellen Randwertproblemen entspringen, Journal für Math. 140 (1911), S. 205—229. Siehe auch A. Kneser, Die Integralgleichungen und ihre Anwendungen in der mathematischen Physik, Braunschweig 1911, Kap. 3.

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{U''(x)}{\varrho^3} &= -C_1 \sin \varrho x - C_2 \cos \varrho x + C_3 \operatorname{Sin} \varrho x + C_4 \operatorname{Cos} \varrho x \\ &+ \frac{1}{2\varrho^3} \left\{ -\cos \varrho x \int_0^x p(z) \sin \varrho z dz + \sin \varrho x \int_0^x p(z) \cos \varrho z dz \right. \\ &+ \operatorname{Sin} \varrho x \int_0^x p(z) \operatorname{Cos} \varrho z dz - \operatorname{Cos} \varrho x \int_0^x p(z) \operatorname{Sin} \varrho z dz \left. \right\}, \\ \frac{U'''(x)}{\varrho^3} &= -C_1 \cos \varrho x + C_2 \sin \varrho x + C_3 \operatorname{Cos} \varrho x + C_4 \operatorname{Sin} \varrho x \\ &+ \frac{1}{2\varrho^3} \left\{ \sin \varrho x \int_0^x p(z) \sin \varrho z dz + \cos \varrho x \int_0^x p(z) \cos \varrho z dz \right. \\ &+ \operatorname{Cos} \varrho x \int_0^x p(z) \operatorname{Cos} \varrho z dz - \operatorname{Sin} \varrho x \int_0^x p(z) \operatorname{Sin} \varrho z dz \left. \right\}. \end{aligned} \right.$$

Jede Lösung von (4) genügt, wie auch die Konstanten $C_1, \dots, C_4$ gewählt sein mögen, der Gleichung (2). Um nun die Größen C zu bestimmen, benutzen wir die drei ersten der vier gegebenen Randbedingungen; die vierte liefert dann die transzendente Gleichung für die Eigenwerte^{*)} und führen statt der bekannten Normierungsbedingung^{*)}

$$\int U_n^2(x) dx = 1$$

vorläufig die inhomogene Randbedingung

$$\frac{U''}{\varrho^2} \Big|_0^1 = 1$$

n. Dann findet man leicht

$$C_2 = -\frac{1}{2}, \quad C_4 = +\frac{1}{2}, \quad C_3 = -C_1,$$

$$\frac{1}{2(\operatorname{Cos} \varrho - \cos \varrho)} \left\{ \sin \varrho + \operatorname{Sin} \varrho + \frac{1}{\varrho^3} \left[-\sin \varrho \int_0^1 p(z) \sin \varrho z dz - \cos \varrho \int_0^1 p(z) \cos \varrho z \right. \right. \\ \left. \left. + \operatorname{Cos} \varrho \int_0^1 p(z) \operatorname{Cos} \varrho z dz - \operatorname{Sin} \varrho \int_0^1 p(z) \operatorname{Sin} \varrho z dz \right] \right\}.$$

Demnach wird

$$\begin{aligned} 2U(x) &= -\cos \varrho x + \operatorname{Cos} \varrho x + \frac{\sin \varrho x - \operatorname{Sin} \varrho x}{\operatorname{Cos} \varrho - \cos \varrho} \left(\sin \varrho + \operatorname{Sin} \varrho + \frac{1}{\varrho^3} [\dots] \right) \\ &+ \frac{1}{\varrho^3} \left\{ \cos \varrho x \int_0^x p \sin \varrho z dz - \sin \varrho x \int_0^x p \cos \varrho z dz \right. \\ &\left. + \operatorname{Sin} \varrho x \int_0^x p \operatorname{Cos} \varrho z dz - \operatorname{Cos} \varrho x \int_0^x p \operatorname{Sin} \varrho z dz \right\}. \end{aligned}$$

^{*)} Das Symbol $\int f(x) dx$ bezeichnet für irgendeine integrable, an der Stelle $x=1$ stetige Funktion den Ausdruck $\int_0^1 f(x) dx + Mf(1)$; vgl. A. Kneser, loc. cit.²⁾.

Da die Differentialgleichung (2) für $0 \leq x \leq 1$ keine singuläre Stelle hat, so besitzt $|U|$ in diesem Intervalle ein Maximum Q_1 ; es ist also stets

$$|U| \leq Q_1.$$

Ebenso gelten drei Ungleichungen

$$\left| \frac{U'}{\varrho} \right| \leq Q_2, \quad \left| \frac{U''}{\varrho^2} \right| \leq Q_3, \quad \left| \frac{U'''}{\varrho^3} \right| \leq Q_4.$$

Bezeichnet man daher die größte der vier Zahlen Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 mit Q , so folgt für $0 \leq x \leq 1$

$$(6) \quad |U| \leq Q, \quad \left| \frac{U'}{\varrho} \right| \leq Q, \quad \left| \frac{U''}{\varrho^2} \right| \leq Q, \quad \left| \frac{U'''}{\varrho^3} \right| \leq Q.$$

Ferner ist

$$(7) \quad \left| \frac{p}{\varrho^2} \right| \leq |B_1| \left| \frac{U''}{\varrho^2} \right| + \left| \frac{B_1'}{\varrho} \right| \left| \frac{U'}{\varrho} \right| + \left| \frac{B_0}{\varrho^2} \right| |U| < Q(|B_1| + |B_1'| + |B_0|) \leq Q$$

wenn $\varrho > 1$ ist und T das Maximum von $|B_1| + |B_1'| + |B_0|$ darstellt. In wenigstens einer der vier Relationen (6) gilt an wenigstens einer Stelle des Intervalls $0 \dots 1$ das Gleichheitszeichen. Die positive Zahl Q , die von x unabhängig ist, jedoch von ϱ abhängt, könnte mit ϱ ins Unendliche wachsen; wir zeigen jetzt, daß dies nicht der Fall ist. Zunächst erhält man aus (5), wenn man $(\sin \varrho x - \text{Sin } \varrho x)$ addiert und unter der runden Klammer wieder subtrahiert,

$$\begin{aligned} 2U(x) &= -\cos \varrho x + \text{Cos } \varrho x + \sin \varrho x - \text{Sin } \varrho x \\ &+ \frac{\sin \varrho x - \text{Sin } \varrho x}{\text{Cos } \varrho - \cos \varrho} \left(-\text{Cos } \varrho + \cos \varrho + \sin \varrho + \text{Sin } \varrho + \frac{1}{\varrho^3} [\dots] \right) \\ &+ \frac{1}{\varrho^3} \left\{ \int_0^x p(z) \sin \varrho(z-x) dz + \int_0^x p(z) \text{Sin } \varrho(x-z) dz \right\}, \end{aligned}$$

ferner unter Berücksichtigung der Identität

$$\begin{aligned} \text{Sin } \varrho - \text{Cos } \varrho &= -e^{-\varrho} \\ 2U(x) &= -\cos \varrho x + \sin \varrho x + \text{Cos } \varrho x - \text{Sin } \varrho x \\ &+ \frac{(\sin \varrho x - \text{Sin } \varrho x)(\cos \varrho + \sin \varrho - e^{-\varrho})}{\text{Cos } \varrho - \cos \varrho} \\ &+ \frac{1}{\varrho^3} \int_0^x p(z) \sin \varrho(z-x) dz + \frac{1}{\varrho^3} \int_0^x p(z) \text{Sin } \varrho(x-z) dz \\ &+ \frac{1}{\varrho^3} \frac{\sin \varrho x - \text{Sin } \varrho x}{\text{Cos } \varrho - \cos \varrho} \left[-\int_0^1 p(z) \cos \varrho(1-z) dz + \int_0^1 p(z) \text{Cos } \varrho(1-z) dz \right]. \end{aligned}$$

Zieht man die beiden letzten Summanden unter eine Klammer zusammen, so wird

$$\begin{aligned}
 f(x) = & \sin \varrho x - \cos \varrho x - \operatorname{Sin} \varrho x + \operatorname{Cos} \varrho x + \frac{(\sin \varrho x - \operatorname{Sin} \varrho x)(\cos \varrho + \sin \varrho - e^{-\varrho})}{\operatorname{Cos} \varrho - \cos \varrho} \\
 & + \frac{1}{\varrho^3} \int_0^x p(z) \sin \varrho(z-x) dz \\
 & + \frac{1}{\varrho - \cos \varrho} \left\{ (\sin \varrho x - \operatorname{Sin} \varrho x) \left(\int_0^1 p(z) \operatorname{Cos} \varrho(1-z) dz - \int_0^1 p(z) \cos \varrho(1-z) dz \right) \right. \\
 & \left. + (\operatorname{Cos} \varrho - \cos \varrho) \int_0^x p(z) \operatorname{Sin} \varrho(x-z) dz \right\}.
 \end{aligned}$$

Die geschweifte Klammer wird folgendermaßen umgeformt:

$$\begin{aligned}
 \{ \dots \} = & (\operatorname{Sin} \varrho x - \sin \varrho x) \int_0^1 p(z) \cos \varrho(z-1) dz \\
 & + \sin \varrho x \int_0^1 p(z) \operatorname{Cos} \varrho(z-1) dz - \operatorname{Sin} \varrho x \int_0^1 p(z) \operatorname{Cos} \varrho(z-1) dz \\
 & - \cos \varrho \int_0^x p(z) \operatorname{Sin} \varrho(x-z) dz + \operatorname{Cos} \varrho \int_0^x p(z) \operatorname{Sin} \varrho(x-z) dz.
 \end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned}
 & - \operatorname{Sin} \varrho x \int_0^1 p(z) \operatorname{Cos} \varrho(z-1) dz + \operatorname{Cos} \varrho \int_0^x p(z) \operatorname{Sin} \varrho(x-z) dz \\
 & = - \operatorname{Sin} \varrho x \int_0^x p(z) \operatorname{Cos} \varrho(z-1) dz \\
 & + \operatorname{Cos} \varrho \int_0^x p(z) \operatorname{Sin} \varrho(x-z) dz - \operatorname{Sin} \varrho x \int_x^1 p(z) \operatorname{Cos} \varrho(z-1) dz,
 \end{aligned}$$

wie

$$\begin{aligned}
 & - \operatorname{Sin} \varrho x \int_x^1 p(z) \operatorname{Cos} \varrho(z-1) dz \\
 & = \frac{1}{2} \int_x^1 (\operatorname{Sin} \varrho(1-z-x) - \operatorname{Sin} \varrho(1-z+x)) p(z) dz
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 & - \operatorname{Sin} \varrho x \int_0^x p(z) \operatorname{Cos} \varrho(z-1) dz + \operatorname{Cos} \varrho \int_0^x p(z) \operatorname{Sin} \varrho(x-z) dz \\
 & = \frac{1}{2} \int_0^x (\operatorname{Sin} \varrho(1-x-z) - \operatorname{Sin} \varrho(1-x+z)) p(z) dz,
 \end{aligned}$$

as durch Anwendung der Additionstheoreme der hyperbolischen Funktionen nicht verifiziert wird.

Setzt man diese Ausdrücke in $\{ \dots \}$ und dann in der Gleichung für $2U(x)$ ein, so folgt

$$\begin{aligned}
 (5^+) \quad 2U(x) = & \sin \varrho x - \cos \varrho x - \operatorname{Sin} \varrho x + \operatorname{Cos} \varrho x + \frac{(\sin \varrho x - \operatorname{Sin} \varrho x)(\sin \varrho + \cos \varrho)}{\operatorname{Cos} \varrho - \cos \varrho} \\
 & + \frac{1}{\varrho^3} \int_0^x p(z) \sin \varrho(z-x) dz + \frac{1}{\varrho^3 (\operatorname{Cos} \varrho - \cos \varrho)} \left(\sin \varrho x \int_0^1 p(z) \operatorname{Cos} \varrho(1-z) dz \right. \\
 & + (\operatorname{Sin} \varrho x - \sin \varrho x) \int_0^1 p(z) \cos \varrho(1-z) dz - \cos \varrho \int_0^x p(z) \operatorname{Sin} \varrho(x-z) dz \\
 & \left. + \frac{1}{2} \int_0^x (\operatorname{Sin} \varrho(1-x-z) - \operatorname{Sin} \varrho(1-x+z)) p(z) dz \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2} \int_x^1 (\operatorname{Sin} \varrho(1-x-z) - \operatorname{Sin} \varrho(1+x-z)) p(z) dz \right).
 \end{aligned}$$

Nun ist zu bedenken, daß

$$\left| \frac{\operatorname{Sin} \varrho u}{\operatorname{Cos} \varrho} \right| \quad \text{und} \quad \left| \frac{\operatorname{Cos} \varrho u}{\operatorname{Cos} \varrho} \right|$$

unter einer von ϱ unabhängigen Schranke bleiben, wenn die reelle Variable u der Ungleichung $|u| \leq 1$ genügt. Das ergibt sich aus

$$\frac{\operatorname{Sin} \varrho u}{\operatorname{Cos} \varrho} = \frac{e^{\varrho(u-1)} - e^{-\varrho(u+1)}}{1 + e^{-2\varrho}}$$

und

$$\frac{\operatorname{Cos} \varrho u}{\operatorname{Cos} \varrho} = \frac{e^{\varrho(u-1)} + e^{-\varrho(u+1)}}{1 + e^{-2\varrho}},$$

da die Koeffizienten des Exponenten ϱ im Zähler ≤ 0 sind. Ferner ist

$$\lim_{\varrho \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{Cos} \varrho}{\operatorname{Cos} \varrho - \cos \varrho} = 1,$$

Aus diesen Beziehungen findet man unter Berücksichtigung von (5^+) und (7) ohne weiteres

$$|U| < \frac{QM_1}{\varrho} + N_1 \quad \text{für} \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Dabei sind M_1 und N_1 positive, von ϱ unabhängige Zahlen. Ganz analoge Ungleichungen erhält man für die Ableitungen von $U(x)$, indem man von den Gleichungen (4^+) ausgeht und hier dieselben Umformungen vornimmt wie in (4) . Es folgt demnach für $0 \leq x \leq 1$

$$\left| \frac{U'}{\varrho} \right| < \frac{QM_2}{\varrho} + N_2, \quad \left| \frac{U''}{\varrho^2} \right| < \frac{QM_3}{\varrho} + N_3, \quad \left| \frac{U'''}{\varrho^3} \right| < \frac{QM_4}{\varrho} + N_4,$$

wobei die M und N dieselben Eigenschaften haben wie M_1 und N_1 . In wenigstens einer unserer vier Ungleichungen wird links der Wert Q einmal erreicht. Mithin ist, wenn i eine bestimmte der Zahlen 1, 2, 3, 4 bezeichnet,

$$Q < \frac{QM_i}{\varrho} + N_i.$$

er $\varrho > 2M_i$ ergibt sich hieraus:

$$Q < \frac{Q}{2} + N_i$$

er

$$\frac{Q}{2} < N_i.$$

ber bleibt Q in der Tat unter einer von ϱ unabhängigen Schranke.

Jetzt folgert man leicht aus (5⁺), wenn $\psi_1, \psi_2, \dots$ Größen bezeichnen, zwischen endlichen, von ϱ unabhängigen Grenzen verbleiben,

$$2U(x) = \sin \varrho x - \cos \varrho x + e^{-\varrho x} - e^{\varrho(x-1)} (\sin \varrho + \cos \varrho) + \frac{\psi_1}{\varrho}.$$

So ist z. B.

$$\frac{\sin \varrho x}{\cos \varrho - \cos \varrho} \int_0^1 p(z) \cos \varrho(1-z) dz = \frac{\sin \varrho x}{\varrho} \int_0^1 \frac{p(z)}{\varrho^2} \cdot \frac{\cos \varrho(1-z)}{\cos \varrho - \cos \varrho} \cdot dz = \frac{\psi_5}{\varrho}.$$

asselbe gilt für die andern mit Integralen behafteten Ausdrücke. Ferner offenbar auch

$$\sin \varrho x \frac{\sin \varrho + \cos \varrho - e^{-\varrho}}{\cos \varrho - \cos \varrho} = \frac{\psi_6}{\varrho}.$$

weiter ergibt sich leicht

$$\frac{-\sin \varrho x (\sin \varrho + \cos \varrho)}{\cos \varrho - \cos \varrho} = -e^{\varrho(x-1)} (\sin \varrho + \cos \varrho) + \frac{\psi_7}{\varrho}.$$

Aus den für die Ableitungen angegebenen Formeln (4⁺) findet man auf genau demselben Wege wie für die Funktion selbst die (8) entsprechenden Gleichungen

$$3+) \left\{ \begin{aligned} \frac{2U'(x)}{\varrho} &= \cos \varrho x + \sin \varrho x - e^{-\varrho x} - e^{\varrho(x-1)} (\sin \varrho + \cos \varrho) + \frac{\psi_2}{\varrho}, \\ \frac{2U''(x)}{\varrho^2} &= -\sin \varrho x + \cos \varrho x + e^{-\varrho x} - e^{\varrho(x-1)} (\sin \varrho + \cos \varrho) + \frac{\psi_3}{\varrho}, \\ \frac{2U'''(x)}{\varrho^3} &= -\cos \varrho x - \sin \varrho x - e^{-\varrho x} - e^{\varrho(x-1)} (\sin \varrho + \cos \varrho) + \frac{\psi_4}{\varrho}. \end{aligned} \right.$$

§ 3.

Asymptotische Darstellung der Eigenwerte.

Die Eigenwerte können jetzt ebenfalls asymptotisch dargestellt werden. Die Zahlen ϱ sind die Wurzeln der Gleichung

$$U'''(x) + (H + \varrho^4 M) U(x) \Big|_{x=1} = 0.$$

Wir unterscheiden nun die beiden Fälle $M > 0$ und $M = 0$ und

untersuchen zunächst den ersten. Sei also $M > 0$; dann findet man durch Division mit $M\varrho^4$

$$\frac{U'''(x)}{M\varrho^4} + \left(\frac{H}{M\varrho^4} + 1 \right) U(x) \Big|_{x=1} = 0.$$

Unter Berücksichtigung von (8) und (8⁺) folgt hieraus

$$U(1) + \frac{\psi_{10}}{\varrho} = 0.$$

Nun ist aber

$$2U(1) = \sin \varrho - \cos \varrho - (\sin \varrho + \cos \varrho) + \frac{\psi_{11}}{\varrho} = -2\cos \varrho + \frac{\psi_{11}}{\varrho}.$$

Demnach ergibt sich

$$(9) \quad \cos \varrho + \frac{\psi_{12}}{\varrho} = 0.$$

Mithin ist

$$\varrho_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi + \varepsilon_n,$$

wo ε_n mit wachsendem n unendlich klein wird. Um ε_n genauer abzuschätzen, setzen wir den Ausdruck für ϱ_n in (9) ein und erhalten

$$\cos \left[\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi + \varepsilon_n \right] = -\sin \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \sin \varepsilon_n = -\frac{\psi_{12}}{\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi + \varepsilon_n},$$

$$\sin \varepsilon_n = \frac{(-1)^n \psi_{12}}{\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi + \varepsilon_n} = \frac{\psi_{12}}{n}, \quad \varepsilon_n = \frac{\psi_{12}}{n}.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi = c_n,$$

so ist endgültig

$$(10) \quad \varrho_n = c_n + \frac{\psi_{12}}{n}.$$

Daraus folgt, daß die Zahlen ϱ_n ungefähr in arithmetischer Progression mit der Differenz π wachsen.

Noch einfacher folgt im Falle $M = 0$ aus

$$U'''(x) + HU(x) \Big|_{x=1} = 0,$$

$$\frac{U'''(x)}{\varrho^3} + \frac{HU(x)}{\varrho^3} \Big|_{x=1} = 0,$$

$$\frac{2U'''(1)}{\varrho^3} + \frac{\psi_{15}}{\varrho} = 0,$$

$$-\cos \varrho - \sin \varrho - (\sin \varrho + \cos \varrho) + \frac{\psi_{16}}{\varrho} = 0,$$

$$(9^+) \quad \sin \varrho + \cos \varrho + \frac{\psi_{17}}{\varrho} = 0.$$

Daraus ergibt sich analog wie im ersten Falle, wenn man

$$\left(n + \frac{3}{4}\right)\pi = d_n$$

setzt,

$$+) \quad \varrho_n = d_n + \frac{\psi'_{18}}{n}.$$

allein wesentliche Eigenschaft der arithmetischen Progression bleibt erhalten.

Wir wollen schließlich noch, indem wir wieder $M > 0$ annehmen, die normierte Eigenfunktion

$$\varphi(x) = \frac{U(x)}{\sqrt{\int U^2(z) dz}}$$

in unseren Zwecken entsprechenden Ausdruck ableiten. Nach (8) ist

$$4 U^2(x) = 1 - 2 \sin \varrho x \cos \varrho x + 2 e^{-2\varrho x} (\sin \varrho x - \cos \varrho x) + e^{-2\varrho x} 2 e^{\varrho(x-1)} (\sin \varrho + \cos \varrho) (\sin \varrho x - \cos \varrho x) + e^{2\varrho(x-1)} (1 + 2 \sin \varrho \cos \varrho) + \frac{\psi'_{19}}{\varrho}.$$

Daraus folgt unter Anwendung elementarer Formeln wie

$$\int_0^1 e^{-2\varrho x} dx = \frac{e^{-2\varrho} - 1}{-2\varrho} \Big|_0^1 = \frac{\psi'_{20}}{\varrho},$$

$$\int_0^1 2 \sin \varrho x \cos \varrho x dx = \frac{\cos 2\varrho - 1}{2\varrho} \Big|_0^1 = \frac{\psi'_{21}}{\varrho},$$

$$\int_0^1 \cos \varrho x e^{-\varrho x} dx = -\frac{\varrho \cos \varrho - \sin \varrho}{\varrho^2} \cdot e^{-\varrho} \Big|_0^1 = \frac{\psi'_{22}}{\varrho} \quad \text{usw.}$$

Die Gleichung

$$\int_0^1 4 U^2 dx = 1 + \frac{\psi'_{23}}{\varrho}.$$

erner ist, wie wir am Anfang dieses Paragraphen gezeigt haben,

$$U(1) = -\frac{\psi'_{10}}{\varrho} = \frac{\psi'_{25}}{\varrho},$$

mithin

$$\int U^2 dx = \int_0^1 U^2 dx + M U^2(1) = \frac{1}{4} + \frac{\psi'_{26}}{\varrho},$$

$$\sqrt{\int U^2 dx} = \frac{1}{2} + \frac{\psi'_{27}}{\varrho}, \quad \frac{1}{\sqrt{\int U^2 dx}} = 2 + \frac{\psi'_{28}}{\varrho}.$$

Demnach ergibt sich leicht

$$\varphi(x) = \sin \varrho x - \cos \varrho x + e^{-\varrho x} - e^{\varrho(x-1)} (\sin \varrho + \cos \varrho) + \frac{\psi'_{29}}{\varrho},$$

und ist nach (10)

$$\sin \varrho_n x = \sin \left(c_n + \frac{\psi'_{14}}{n} \right) x,$$

und die Anwendung der Taylorschen Formel liefert

$$\sin \varrho_n x = \sin c_n x + \frac{\psi'_{14} \cdot x}{n} \cos \left(c_n + \frac{\Theta \psi'_{14}}{n} \right) x, \quad 0 < \Theta < 1$$

also wird

$$\sin \varrho_n x = \sin c_n x + \frac{\psi_{22}}{n}.$$

Behandelt man die andern in der Gleichung für $\varphi(x)$ auftretenden Ausdrücke ebenso, so folgt endgültig

$$(11) \quad \varphi(x) = \sin cx - \cos cx + e^{-cx} - e^{c(x-1)} \sin c + \frac{\psi_{22}}{n},$$

d. h. ϱ kann einfach durch c ersetzt werden.

Für die Ableitungen ergibt sich aus (8⁺)

$$(11^+) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\varphi'(x)}{\varrho} = \cos cx + \sin cx - e^{-cx} - e^{c(x-1)} \sin c + \frac{\psi_{24}}{n}, \\ \frac{\varphi''(x)}{\varrho^2} = -\sin cx + \cos cx + e^{-cx} - e^{c(x-1)} \sin c + \frac{\psi_{25}}{n}, \\ \frac{\varphi'''(x)}{\varrho^3} = -\cos cx - \sin cx - e^{-cx} - e^{c(x-1)} \sin c + \frac{\psi_{26}}{n}. \end{array} \right.$$

Im Falle $M = 0$ kann man natürlich eine ganz ähnliche Darstellung gewinnen, wobei nur d_n an Stelle von c_n zu setzen ist; wir wollen aber hierauf nicht weiter eingehen.

Auf den Gleichungen (10), (11) und (11⁺) beruhen die Entwicklungen des folgenden Paragraphen.

Bevor wir zu den Konvergenzbeweisen übergehen, wollen wir die obigen Ergebnisse über asymptotische Darstellungen nach zwei Richtungen hin verallgemeinern; wir werden nämlich komplexe Werte von Λ zulassen und ferner nicht bloß eine den Randbedingungen genügende Lösung von (2), sondern ein ganzes Fundamentalsystem asymptotisch darstellen. Wir nehmen an, daß Λ in der komplexen Zahlenebene längs einer beliebigen Halbgeraden durch den Nullpunkt ins Unendliche geht. Bedeutet ϱ irgendeine vierte Wurzel aus Λ , so sind alle Wurzeln durch $\varrho\varepsilon_1, \varrho\varepsilon_2, \varrho\varepsilon_3, \varrho\varepsilon_4$ gegeben, wenn die ε_i ($i = 1, 2, 3, 4$) die vier vierten Einheitswurzeln bezeichnen. Sie seien so geordnet, daß

$$R(\varrho\varepsilon_1) \geq R(\varrho\varepsilon_2) \geq R(\varrho\varepsilon_3) \geq R(\varrho\varepsilon_4)$$

ist; unter $R(a)$ verstehen wir stets den reellen Teil der Größe a . Nun läßt sich ähnlich wie oben bei der Behandlung der Eigenfunktion zeigen, daß vier linear unabhängige Lösungen $U_i(x)$ von (2) existieren, welche den Gleichungen

$$U_i(x) = e^{\varrho\varepsilon_i x} \left(1 + \frac{\psi_i^{(1)}}{\varrho} \right),$$

$$U_i'(x) = \varrho\varepsilon_i e^{\varrho\varepsilon_i x} \left(1 + \frac{\psi_i^{(2)}}{\varrho} \right),$$

$$U_i''(x) = \varrho^3 \varepsilon_i^3 e^{\varepsilon_i x} \left(1 + \frac{\psi_i^{(3)}}{\varrho} \right),$$

$$U_i'''(x) = \varrho^3 \varepsilon_i^3 e^{\varepsilon_i x} \left(1 + \frac{\psi_i^{(4)}}{\varrho} \right)$$

genügen, wobei die ψ eine der früheren analoge Bedeutung haben. Ist $U(x)$ eine den Randbedingungen genügende Lösung von (2), so kann

$$U(x) = \sum_{i=1}^{i=4} c_i U_i(x)$$

gesetzt werden; hierin sind die c_i konstante, d. h. von x unabhängige, aber von ϱ abhängige Zahlen. Aus

$$U(0) = \sum c_i U_i(0) = 0,$$

$$U'(0) = \sum c_i U_i'(0) = 0,$$

$$U'(1) = \sum c_i U_i'(1) = 0,$$

$$U'''(1) + (H + \Lambda M) U(1) = \sum c_i (U_i'''(1) + (H + \Lambda M) U_i(1)) = 0$$

ergibt sich jetzt, da die aus den Koeffizienten der c_i gebildete Determinante verschwinden muß,

$$\begin{vmatrix} U_1(0), & U_1'(0), & U_1'(1), & U_1'''(1) + (H + \Lambda M) U_1(1) \\ U_2(0), & \dots & \dots & \dots \\ U_3(0), & \dots & \dots & \dots \\ U_4(0), & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0.$$

Substituiert man in dieser Gleichung für die Funktionen $U_i(x)$ und ihre Ableitungen die obigen asymptotischen Darstellungen und versteht von hier an unter ϱ der Einfachheit halber die vierte Λ -Wurzel mit größtem reellen Teil, so findet man leicht, ohne etwas über $B_1(x)$ oder H vorauszusetzen, daß ϱ für große Werte von $|\varrho|$ positiv ist. Demnach ist auch $\Lambda_n = \varrho_n^4$ von einem bestimmten n an positiv. Außerdem liefert die obige transzendente Gleichung natürlich auch die asymptotische Darstellung von ϱ . Die der Eigenfunktion gewinnt man bei dieser Beweisaneinanderstellung folgendermaßen. Aus den drei ersten Randbedingungen und der Hilfsgleichung

$$\frac{U''(0)}{\varrho^3} = \sum c_i \frac{U_i''(0)}{\varrho^2} = 1$$

berechnet man die Zahlen c_i . Die asymptotische Darstellung der c_i und der $U_i(x)$, $U_i'(x)$, $U_i''(x)$, $U_i'''(x)$ ermöglicht dann die der Eigenfunktion $U(x)$ und ihrer Ableitungen.

§ 4.

Entwicklung unstetiger Funktionen.

Um eine willkürliche Funktion, die nebst ihren ersten vier Ableitungen für $0 \leq x \leq 1$ stückweise stetig ist und den Randbedingungen der Eigenfunktionen nicht zu genügen braucht, nach diesen letzteren zu entwickeln, sind folgende Bedingungen hinreichend⁷⁾:

Die Reihen

$$(A) \quad \sum_n \frac{\varphi_n(x) \varphi_n(\xi)}{\Lambda_n}, \quad \sum_n \frac{\varphi_n'(x) \varphi_n(\xi)}{\Lambda_n}, \quad \sum_n \frac{\varphi_n''(x) \varphi_n(\xi)}{\Lambda_n}$$

konvergieren gleichmäßig für $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq \xi \leq 1$;

$$(B) \quad \sum_n \frac{\varphi_n'''(x) \varphi_n(\xi)}{\Lambda_n}$$

konvergiert gleichmäßig für $\varepsilon \leq x \leq 1 - \varepsilon$, $\varepsilon \leq \xi \leq 1 - \varepsilon$, $|x - \xi| \geq \varepsilon$, wo ε eine beliebig kleine, positive feste Größe ist.

$$(C) \quad \sum_n \frac{\varphi_n'''(x) \varphi_n(x)}{\Lambda_n}, \quad (D) \quad \sum_n \frac{\varphi_n'''(0) \varphi_n(x)}{\Lambda_n}, \quad \sum_n \frac{\varphi_n'''(1) \varphi_n(x)}{\Lambda_n}$$

konvergieren gleichmäßig für $\varepsilon \leq x \leq 1 - \varepsilon$.⁸⁾

(Diese Bedingungen sind, wie wir nebenbei und ohne Beweis bemerken, auch notwendig, was sich aus den Stetigkeitseigenschaften des Kerns leicht ergibt.) Sind sie nämlich erfüllt, so stellt die Fouriersche Reihe

$\sum_n \varphi_n(x) \int_0^1 f(\xi) \varphi_n(\xi) d\xi$ der willkürlichen Funktion $f(x)$ in allen Punkten des Intervalls $0 \dots 1$ mit Ausschluß der beiden Randpunkte die Größe

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2},$$

in den Punkten, wo die Funktion stetig ist, also

$$f(x)$$

selbst dar. Diese Sätze, die zunächst nur im Falle der gewöhnlichen Orthogonalität und gewöhnlicher Integralgleichungen gelten, können auch auf belastete übertragen werden⁹⁾.

⁷⁾ Vgl. A. Kneser, loc. cit.¹⁾; E. Juretzka. Die Entwicklung unstetiger Funktionen nach den Eigenfunktionen des schwingenden Stabes auf Grund der Theorie der Integralgleichungen, Inaugural-Dissertation. Breslau 1909. — W. Sternberg, Die Entwicklung willkürlicher Funktionen in der mathematischen Physik mittels der Methode der Integralgleichungen, Inaugural-Dissertation. Breslau 1912.

⁸⁾ Diese Reihen stellen den Kern und seine Ableitungen dar; vgl. E. Schmidt, loc. cit.¹⁾ § 8.

⁹⁾ Vgl. A. Kneser, loc. cit.²⁾.

Wir beginnen mit der Untersuchung von

$$\sum_n \frac{\varphi_n''(x) \varphi_n(\xi)}{\Lambda_n} = \sum_n \frac{\frac{\varphi_n''(x)}{\varrho_n^2} \cdot \varphi_n(\xi)}{\varrho_n^3}.$$

$\left| \frac{\varphi_n''(x)}{\varrho_n^2} \right|$ und $|\varphi_n(\xi)|$ unter einer von ϱ unabhängigen Grenze bleiben und

$$\sum_n \frac{1}{\varrho_n^3}$$

h im wesentlichen wie

$$\sum_n \frac{1}{n^3}$$

erhält, so ergibt sich in der Tat die gleichmäßige und sogar auch die absolute Konvergenz für $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq \xi \leq 1$. Die andern unter (A) stehenden Reihen konvergieren offenbar ebenso gut wie $\sum_n \frac{1}{n^3}$ resp. $\sum_n \frac{1}{n^4}$.

Die Reihe (B) kann unter Benutzung von (13) und (13⁺) übergeführt werden in

$$\frac{\sin c_n x + \cos c_n x + e^{-c_n x} + \sin c_n e^{-c_n(1-x)}}{c_n} \left\{ \sin c_n \xi - \cos c_n \xi + e^{-c_n \xi} - \sin c_n e^{-c_n(1-\xi)} \right\} + \sum_n \frac{\psi_{40}}{n^2}.$$

es genügt also, folgende Reihen zu behandeln:

$$\begin{aligned} & \sum_n \frac{(\sin c_n x + \cos c_n x)(\sin c_n \xi - \cos c_n \xi)}{c_n}, \\ \text{I)} & \sum_n \frac{(e^{-c_n x} + \sin c_n e^{-c_n(1-x)})(\sin c_n \xi - \cos c_n \xi)}{c_n}, \\ \text{II)} & \sum_n \frac{(\sin c_n x + \cos c_n x)(e^{-c_n \xi} - \sin c_n e^{-c_n(1-\xi)})}{c_n}, \\ \text{V)} & \sum_n \frac{(e^{-c_n x} + \sin c_n e^{-c_n(1-x)})(e^{-c_n \xi} - \sin c_n e^{-c_n(1-\xi)})}{c_n}. \end{aligned}$$

Die in (I) enthaltene Reihe

$$\sum_n \frac{\sin c_n x \cos c_n \xi}{c_n}$$

wird mittels der Identität

$$2 \sin c_n x \cos c_n \xi = \sin c_n(x + \xi) + \sin c_n(x - \xi)$$

duziert auf

$$\sum_n \frac{\sin c_n(x + \xi)}{c_n} \quad \text{und} \quad \sum_n \frac{\sin c_n(x - \xi)}{c_n}.$$

auf diesen oder auf

$$\sum_n \frac{\cos c_n(x + \xi)}{c_n} \quad \text{und} \quad \sum_n \frac{\cos c_n(x - \xi)}{c_n}$$

beruhen auch die andern drei Reihen von (I). Sie alle konvergieren daher in den für x und ξ festgelegten Gebieten gleichmäßig, da dasselbe bekanntlich von

$$\sum_n \frac{\sin(2n+1)u}{2n+1} \quad \text{und} \quad \sum_n \frac{\cos(2n+1)u}{2n+1}$$

im Intervalle $\delta \leq u \leq \pi - \delta$ gilt.

Was (II) betrifft, so konvergiert zunächst

$$\sum e^{-c_n \varepsilon};$$

denn

$$\sum \frac{1}{(c_n \varepsilon)^s}$$

konvergiert, wenn $s > 1$ ist, und es ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(c_n \varepsilon)^s}{e^{c_n \varepsilon}} = 0,$$

wie groß auch die positive Zahl s sein mag. Daraus ergibt sich nun, daß

$$\sum e^{-c_n x} \quad \text{sowie} \quad \sum e^{-c_n(1-x)}$$

in dem oben festgelegten Intervalle $\varepsilon \leq x \leq 1 - \varepsilon$ gleichmäßig und absolut konvergiert, also a fortiori auch

$$\sum \frac{e^{-c_n x} (\sin c_n \xi - \cos c_n \xi)}{c_n}, \quad \sum \frac{e^{-c_n(1-x)} \sin c_n (\sin c_n \xi - \cos c_n \xi)}{c_n}.$$

Die Reihen (III) sind von (II) nicht wesentlich verschieden.

Wir zerlegen jetzt (IV) in

$$\begin{aligned} & \sum \frac{e^{-c_n(x+\xi)}}{c_n}, & \sum \frac{e^{-c_n(2-x-\xi)} \sin^2 c_n}{c_n}, \\ & \sum \frac{\sin c_n e^{-c_n(1-x+\xi)}}{c_n}, & \sum \frac{\sin c_n e^{-c_n(1+x-\xi)}}{c_n}. \end{aligned}$$

Da

$$x + \xi > 2\varepsilon, \quad 2 - x - \xi > 2\varepsilon, \quad 1 + x - \xi > 2\varepsilon, \quad 1 - x + \xi > 2\varepsilon$$

ist, folgt wie in (II) die gleichmäßige Konvergenz.

Aus (C) ergeben sich die Reihen

$$\begin{aligned} & \sum \frac{\cos 2c_n x}{c_n}, & \sum \frac{e^{-c_n x} (\sin c_n x - \cos c_n x)}{c_n}, \\ & \sum \frac{e^{-3c_n x}}{c_n}, & \sum \frac{e^{-3c_n(1-x)} \sin^2 c_n}{c_n}, \end{aligned}$$

die durch die obigen Untersuchungen bereits erledigt sind. Dasselbe gilt von (D).

§ 5.

Entwicklung ohne Anwendung asymptotischer Darstellungen.

Um willkürliche Funktionen ohne Anwendung asymptotischer Darstellungen nach den Eigenfunktionen zu entwickeln, benutzen wir einen z von Weyl¹⁰⁾. Dabei ist es nicht mehr nötig, auf den Kern und die Ableitungen zurückzugehen; vielmehr wird die Entwicklung einer beliebigen unstetigen Funktion direkt in Angriff genommen. Es sei Γ die Gesamtheit aller reellen Funktionen von x , die im Intervalle $0 \dots 1$ nebst den Quadraten und Produkten zu je zweien im Sinne von Lebesgue integrabel sind. Sei ferner $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$ eine unendliche Folge von Funktionen aus Γ , die normiert und zueinander orthogonal sind. Dann sagt der Weylsche Satz, daß für jede Funktion $f(x)$ aus Γ eine Folge von positiven, ganzen, zunehmenden Zahlen $n_1, n_2, \dots$ angegeben werden kann, so daß die Reihe

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \sum_{v=n_{i-1}+1}^{n_i} \varphi_v(x) \int_0^1 f(\xi) \varphi_v(\xi) d\xi \right\}$$

im Intervalle $0 \dots 1$ wesentlich gleichmäßig¹¹⁾ konvergiert. Daraus ergibt sich dann eine Formel von Lauricella¹²⁾

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \sum_{v=n_{i-1}+1}^{n_i} \varphi_v(x) \int_0^1 f(\xi) \varphi_v(\xi) d\xi \right\} + \Theta(x),$$

wobei $\Theta(x)$ zu allen $\varphi_v(x)$ orthogonal ist. Auch diese Formel gilt im allgemeinen. Da $f(x)$ und $\sum_{i=1}^{\infty} \{ \dots \}$ im allgemeinen stetige Funktionen darstellen, so hat ihre Differenz $\Theta(x)$ dieselbe Eigenschaft. Von hier an können die $\varphi_v(x)$ wieder die Lösungen unseres Randwertproblems bezeichnen, in welchem wir jetzt $M=0$ annehmen, damit die Funktionen orthogonal im gewöhnlichen Sinne sind. Der Satz von Weyl mit seinen Folgerungen gilt nämlich nur für solche Funktionen. Dann läßt sich zeigen, daß $\Theta(x)$ an jeder Stetigkeitsstelle verschwinden muß. Denn ist c eine solche und wäre etwa $\Theta(c) > 0$, so könnte man wegen der Stetigkeit ein Intervall $a < c < b$ angeben, in dem ständig $\Theta(x) > 0$ sein

¹⁰⁾ Vgl. H. Weyl, l. c. *).

¹¹⁾ D. h. mit Ausschluß der Punkte einer Menge vom Maße 0. Hierfür schreiben wir von jetzt an „im allgemeinen“.

¹²⁾ Vgl. L. Amoroso, Gli sviluppi in serie per l'applicazione del methodo di Fourier all'integrazione delle equazioni e dei sistemi di equazioni alle derivate parziali della fisico mathematica, Nuovo Cimento (6) 4 (1912), S. 376–414.

müßte. Nun ist $\Theta(x)$ auch zu jeder Funktion $F(x)$ orthogonal, die in der Form

$$F(x) = \int_0^1 K(x, \xi) g(\xi) d\xi$$

dargestellt werden kann, wobei $K(x, \xi)$ den Kern der Integralgleichung der die $\varphi_r(x)$ genügen, und $g(\xi)$ eine für $0 \leq \xi \leq 1$ stetige Funktion bezeichnet. Denn es gilt die gleichmäßig konvergente Entwicklung¹³⁾

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) \int_0^1 F(\xi) \varphi_n(\xi) d\xi,$$

aus der sich durch Multiplikation mit $\Theta(x)$ und Integration von 0 bis 1

$$\int_0^1 F(x) \Theta(x) dx = 0$$

ergibt. Wir benutzen die Funktion

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq x \leq a, \\ (x-a)^m (b-x)^m & \text{,, } a \leq x \leq b, \\ 0 & \text{,, } b \leq x \leq 1, \end{cases}$$

welche, wenn die positive ganze Zahl m groß genug ist, tatsächlich in der obigen Form darstellbar ist; dies wird in der Theorie der Integralgleichungen bewiesen¹⁴⁾. Offenbar ist nun aber

$$\int_0^1 F(x) \Theta(x) dx = \int_a^b F(x) \Theta(x) dx > 0.$$

Das ist ein Widerspruch; mithin ist $\Theta(c) = 0$. Daraus folgt die im allgemeinen richtige Formel

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \sum_{r=n_{i-1}+1}^{n_i} \varphi_r(x) \int_0^1 f(\xi) \varphi_r(\xi) d\xi \right\}.$$

Man erhält also jetzt nur eine im allgemeinen gültige Entwicklung. Das ist ein Nachteil, der nicht dadurch aufgewogen wird, daß man jetzt von der willkürlichen Funktion $f(x)$ nicht mehr stückweise Stetigkeit, sondern bloß Integrabilität von $f(x)$ und $f^2(x)$ vorauszusetzen braucht. Die Methode der asymptotischen Darstellungen ist also der zweiten hier benutzten vorzuziehen.

¹³⁾ Vgl. E. Schmidt, l. c. 1).

¹⁴⁾ S. etwa D. A. Westfall, l. c. 1).

Die für die Korrelation eines polaren Raumes invarianten nahen Komplexe und die aus ihnen gebildeten zwei I -Bündel.

Von

Stanislaus Jolles in Berlin.

Jeder Bündel linearer Komplexe I oder, wie wir kurz sagen, jeder I -Bündel bestimmt einen polaren Raum Π , dessen Korrelation die Komplexe des I -Bündels und seines Stammbündels invariant läßt. Die Komplexe des I -Bündels gehen durch die eine, die seines Stammbündels durch die andere Regelschar der Inzidenzfläche von Π ; diese Inzidenzfläche kann reell oder imaginär sein. — Umgekehrt bestimmt ein polarer Raum Π , dessen Inzidenzfläche P^2 eine reelle Regelfläche zweiten Grades oder imaginär ist, ∞^2 für seine Korrelation invariante lineare Komplexe, die zwei Bündel bilden. Der eine wird von der einen, der andere von der anderen Regelschar der Regelfläche P^2 getragen; jeder ist der Stammbündel des andern. Beide I -Bündel können ohne weiteres konstruiert werden, wenn P^2 reell ist; ihre Konstruktion bietet aber Schwierigkeiten, wenn P^2 imaginär wird und ist für diesen Fall meines Wissens bisher nicht ausgeführt worden. Die folgende Untersuchung liefert beide I -Bündel, gleichgültig ob Π eine reelle oder imaginäre Inzidenzfläche hat. Sie erweist zugleich den Zusammenhang der Komplexe beider Bündel mit den in Π enthaltenen involutorischen Regelflächen zweiten Grades¹⁾ und ordnet diese Flächen dem polaren Raume organisch ein.

1. Eine lineare Strahlenkongruenz K_1^1 sei für die Korrelation eines polaren Raumes Π invariant, und die durch K_1^1 einander zugeordneten Punkte und Ebenen seien in Π konjugiert. Hat Π eine reelle Inzidenzfläche P^2 , so ist P^2 einschärig in K_1^1 und jedem durch K_1^1 gehenden nahen Komplexen enthalten; jeder dieser Komplexe ist also für P^2 polarinvariant²⁾. Ist P^2 imaginär, so verbinden wir zunächst Π mit dem

¹⁾ v. Staudt, Beiträge zur Geometrie der Lage, 1856, § 5.

²⁾ v. Staudt, Beiträge zur Geometrie der Lage, 1856, Nr. 105.

polaren Räume einer einscharig in K_1^1 enthaltenen Regelfläche zweiten Grades durch einen Büschel polarer Räume und den nicht in der linearen Kongruenz K_1^1 gelegenen Strahl l mit K_1^1 durch den linearen Komplex Γ . Da die reellen Inzidenzflächen der polaren Räume des Büschels einscharig in K_1^1 enthalten sind³⁾, so sind die Polaren von l für diese ∞^1 Fläche wiederum Strahlen von Γ . Die Polaren von l für die polaren Räume des Büschels bilden somit eine Regelschar zweiter Ordnung, von der unendlich viele und folglich alle Strahlen in Γ enthalten sind. Die Polare eines nicht in K_1^1 enthaltenen Strahles l von Γ ist also für den polaren Raum Π mit der imaginären Inzidenzfläche P^2 wiederum ein Strahl dieses Komplexes, und da außerdem K_1^1 invariant für die Korrelation von Π ist, so ist es auch Γ . Kurz:

Ist eine lineare Strahlenkongruenz K_1^1 für die Korrelation eines polaren Raumes Π invariant, und sind die für K_1^1 einander zugeordneten Punkte und Ebenen in Π konjugiert, so ist für die Korrelation von Π auch jeder Komplex des von K_1^1 getragenen Γ -Büschels invariant.

2. Geht durch eine Gerade g eine lineare Strahlenkongruenz K_{1g}^1 , die für die Korrelation eines gegebenen polaren Raumes Π invariant ist, so ist die Polare g' von g in Π ebenfalls ein Strahl von K_{1g}^1 . Sind ferner die durch K_{1g}^1 einander zugeordneten Punkte und Ebenen in Π konjugiert, so bestehen die von g und g' getragenen Paare einander zugeordneter Punkte und Ebenen aus in Π konjugierten Elementen. ∞^1 polare Räume enthalten bekanntlich die reziproken Polaren g, g' von Π und die in ihnen durch Π hervorgerufenen Involutionen konjugierter Punkte und Ebenen. Sie bilden einen Büschel; die Inzidenzflächen seiner polaren Räume sind, wenn K_{1g}^1 hyperbolisch ist, lauter reelle, wenn K_{1g}^1 elliptisch ist, teils reelle Regelflächen zweiter Ordnung, teils imaginär. Jede dieser Regelflächen ist einscharig in K_{1g}^1 enthalten⁴⁾. Ist F^3 eine dieser Regelflächen und $\mathfrak{R}^2$ ihre in K_{1g}^1 gelegene Regelschar, so ist die Kongruenz K_{1g}^1 durch $\mathfrak{R}^2$ und den Strahl g bestimmt. Durch einen gegebenen Punkt P geht die Fläche F_P^2 des von den Inzidenzflächen der polaren Räume gebildeten F^3 -Büschels; der mit P inzidente Strahl von K_{1g}^1 liegt in der Regelschar, die F_P^2 mit K_{1g}^1 gemein hat. — Verbinden wir nunmehr den Strahl g mit der Leitschar Ω^2 von $\mathfrak{R}^2$ durch eine lineare Kongruenz S_{1g}^1 , so ist g' als Polare von g für F^2 auch ein Strahl von S_{1g}^1 . Die reziproken Polaren g, g' und ihre durch S_{1g}^1 einander zugeordneten, also für F^2 konjugierten Punkte und Ebenen bestimmen wiederum unsern Büschel polarer

³⁾ Jolles, Primäre und sekundäre polare Räume einer linearen Strahlenkongruenz, Journ. f. d. reine u. angew. Math., Bd. 134 (1908), Nr. 3.

⁴⁾ Jolles, a. a. O., Nr. 7.

ume. Jede seiner reellen Inzidenzflächen ist aber jetzt einscharig in Π enthalten, und zwar mit der Leitschar der Regelschar, die diese Fläche mit K_{1g}^1 gemein hat. Die eine Strahlenschar einer solchen Fläche liegt also in der Kongruenz K_{1g}^1 , die andere in der Kongruenz S_{1g}^1 . Somit gilt:

Es lassen sich durch eine gegebene Gerade g zwei lineare Strahlenkongruenzen K_{1g}^1 und S_{1g}^1 legen, die für die Korrelation eines polaren Raumes Π invariant sind und dabei nur in Π konjugierte Punkte und Ebenen einander zuordnen. K_{1g}^1 und S_{1g}^1 schneiden sich außer g noch in der Polare g' von g in Π und sind nur dann reell, wenn die Inzidenzfläche von Π eine Regelfläche zweiter Ordnung P^2 reell oder imaginär ist. Im ersteren Falle enthält jede der Kongruenzen K_{1g}^1 und S_{1g}^1 eine andere Strahlenschar von P^2 . — Die Kongruenzen K_{1g}^1 und S_{1g}^1 sind Träger von Γ -Büscheln, deren Komplexe für die Korrelation von Π invariant sind (1.); jeder Komplex des einen Büschels ist für die Komplexe des anderen nullinvariant, und die Kongruenzen K_{1g}^1 und S_{1g}^1 sind für einander geschartinvariant. Beide Kongruenzen sind ferner für die Korrelationen der polaren Räume eines Büschels invariant. Die durch die Kongruenzen einander zugeordneten Punkte und Ebenen sind in den polaren Räumen dieses Büschels konjugiert, und letztere enthalten die gemeinsamen reziproken Polaren g, g' .

3. Bestimmen wir, während die Gerade g einen Strahlenbündel beschreibt, für jede ihrer Lagen nach 2. die Kongruenzen K_{1g}^1 und S_{1g}^1 , so erhalten wir alle für die Korrelation von Π invarianten linearen Kongruenzen K_{1g}^1 und S_{1g}^1 , und zwar ∞^2 . Je zwei Kongruenzen K_{1g}^1 werden durch einen für die Korrelation von Π invarianten linearen Komplex verbunden, und zwei lineare Komplexe je zweier Kongruenzen K_{1g}^1 schneiden sich stets wieder in einer solchen Kongruenz. Die ∞^2 Kongruenzen K_{1g}^1 und ihre linearen Komplexe bilden also einen Γ -Bündel, analoges gilt von den Kongruenzen S_{1g}^1 . Jeder von beiden Bündeln besteht nach 2. aus ∞^2 Stammkomplexen des andern, oder:

Die Kongruenzen K_{1g}^1 und S_{1g}^1 sind bzw. die linearen Kongruenzen zweier Γ -Bündel $\Gamma(K_{1g}^1)$ und $\Gamma(S_{1g}^1)$, deren Komplexe für die Korrelation des polaren Raumes Π invariant sind. Jeder der beiden Γ -Bündel ist der andere Stammkomplex.

4. Ist K_{1g}^1 eine lineare Kongruenz des Γ -Bündels $\Gamma(K_{1g}^1)$, dessen Komplexe für die Korrelation des polaren Raumes Π invariant sind (3.), so sind je zwei in Π reziprok polare Strahlen der Kongruenz K_{1g}^1 durch den Komplex Γ_g' , für den K_{1g}^1 nullinvariant ist, einander zugeordnet⁵⁾.

⁵⁾ Jolles, Neue Beweise einiger Sätze aus der Theorie der linearen Komplexe, Journ. f. d. reine u. angew. Math., Bd. 130 (1904), Nr. 5.

Die Inzidenzfläche P^2 von Π ist mit der einen Regelschar in K_{1g}^1 enthalten und mit der andern in Γ_g' . Die in Γ_g' enthaltene Regelschar von P^2 ist durch K_{1g}^1 involutorisch gepaart. Die Doppelstrahlen der Involution sind die reellen bzw. konjugiert imaginären Strahlen von Γ_g' , die mit den Leitgeraden von K_{1g}^1 zusammenfallen. Für die Korrelation von Π sind, da P^2 einscharig in K_{1g}^1 enthalten ist, ∞^2 Regelscharen zweiter Ordnung von K_{1g}^1 invariant, sie bilden einen Bündel⁶⁾. Ihre in Π reziprok polaren Strahlen sind, worauf soeben hingewiesen wurde, durch Γ_g' einander zugeordnet, und jede bestimmt als involutorische Regelschar des Nullraumes von Γ_g' diesen Nullraum⁷⁾ und also den Komplex selbst. Fällt K_{1g}^1 nacheinander mit den linearen Kongruenzen des Bündels $\Gamma'(K_{1g}^1)$ zusammen, so fällt Γ_g' nacheinander mit den linearen Komplexen des Bündels zusammen. Jeder der ∞^2 Nullräume der Bündelkomplexe hat aber mit Π einen Bündel von Regelscharen zweiter Ordnung gemein, die Gesamtheit der ∞^2 Nullräume, also ∞^2 Bündel, d. h. ∞^4 Regelscharen zweiter Ordnung. Die ∞^4 involutorischen Regelscharen liegen auf ∞^4 in Π enthaltenen involutorischen Flächen zweiter Ordnung, somit schließen wir, gleichgültig ob P^2 reell oder imaginär ist:

„Ein polarer Raum Π enthält, wenn für ihn die Komplexe eines Γ -Bündels invariant sind, seine Inzidenzfläche also eine Regelfläche zweiter Ordnung oder imaginär ist, ∞^4 involutorische Regelflächen zweiter Ordnung; sie bilden ∞^2 Bündel. Jede involutorische Regelschar einer solchen Fläche bestimmt einen sie enthaltenden Nullraum und seinen linearen Komplex. Der eine dieser Komplexe liegt in dem einen, der andere in dem anderen Γ -Bündel, dessen Komplexe für die Korrelation von Π invariant sind.“

Berlin-Halensee, den 17. Oktober 1918.

⁶⁾ Jolles, Primäre und sekundäre Räume einer linearen Strahlenkongruenz. Journ. f. d. reine u. angew. Math., Bd. 134 (1907), Nr. 9.

⁷⁾ Charles, Propriétés nouvelles de l'Hyperboloïde à une nappe, Journ. de Math., Bd. 4 (1839), S. 348.

(Eingegangen am 9. November 1918.)

Über eine neue Randwertaufgabe bei elastischen Membranen.

Von

Otto Blumenthal in Aachen.

Die Frage, die in dieser Arbeit behandelt wird, ergab sich durch Realisierung einer technischen Aufgabe. Über diese wird an anderer Stelle berichtet werden. Hier will ich nur das rein mathematische Problem nennen. Es führt auf eine Randwertaufgabe, die aus dem Rahmen der bisher betrachteten wesentlich herauszutreten scheint und neuartige Erscheinungen der Verteilung der Eigenwerte aufweist.

Im ersten Abschnitt entwickle ich die Fragestellung und gebe eine Lösung des Problems durch Fourier-Reihen. Der Schwerpunkt der Betrachtungen liegt im zweiten Abschnitt, wo die Vollständigkeit und Eindeutigkeit besprochen wird.

Abschnitt I.

§ 1.

Die Fragestellung.

Unter einer Membran verstehen wir, wie üblich, ein ebenes Gebilde mit folgenden elastischen Eigenschaften:

1. Biegungs- und Drillungsmomente können nicht aufgenommen werden.
2. Durch künstliche Mittel (Vorreckung) ist eine allseitig gleiche Normalspannung T erzeugt, neben der die örtlichen Änderungen der Normalspannungen und die Schubspannungen vernachlässigt werden können.

Diese Membran, in der (x, y) -Ebene liegend gedacht, soll im Gleichgewicht sein. $z(x, y)$ sei die vertikale Verrückung, wir haben nur das Gleichgewicht in vertikaler Richtung zu betrachten.

Ist ds die Länge eines Linienelementes, n seine Normale, so ist die Gewichtskraft dieses Elementes übertragene Vertikalkraft $= T \frac{dz}{dn} ds$.

Für das Gleichgewicht eines Punktes im Innern der Membran ergibt sich hieraus folgendes: Wir umgeben den Punkt mit einer geschlossenen Kurve C . Das Gleichgewicht des von dieser Kurve umschlossenen Gebietes erfordert, wenn n die innere Normale bedeutet:

$$\int T \frac{dz}{dn} ds = T \int \frac{dz}{dn} ds = -T \int \Delta z de = 0 \quad (de = \text{Flächenelement})$$

Also durch Übergang zu genügend kleinen Gebieten:

$$(1) \quad \Delta z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Für einen auf einem freien Rande gelegenen Membranpunkt aber haben wir

$$(2) \quad \frac{dz}{dn} = 0.$$

Nach dieser Vorbemerkung stellen wir die Aufgabe, die hier behandelt werden soll. Gegeben sei eine rechteckige Membran von der Länge (x -Richtung) a und der Breite (y -Richtung) $2b$. Am Rande $x = 0$ sei die Membran festgehalten, also

$$(3) \quad z = 0 \quad \text{für} \quad x = 0;$$

der Rand $x = a$ sei frei, also

$$(2) \quad \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad \text{für} \quad x = a.$$

Die Begrenzung der Membran für $y = \pm b$ aber werde gebildet durch zwei elastische Stäbe, für die die Biegungsgleichung

$$(4) \quad EJ \frac{d^2 z}{dx^2} = -M(x)$$

gilt. Hierin ist E der Elastizitätsmodul, J das Trägheitsmoment um die (horizontale) neutrale Achse, $M(x)$ das Biegemoment im Querschnitt x ; E und J seien für jeden Randstab konstant.

Auf einen Randstab wirke in vertikaler Richtung die äußere stetige Kraft $g(x)$ auf die Längeneinheit. Außerdem übt die Spannung der Membran eine Vertikalkraft aus, deren Betrag auf die Längeneinheit im Querschnitt x nach der Vorbemerkung $= T \frac{dz}{dn}$ ist (n = innere Normale). Der Stab soll ferner an zwei Stellen gestützt sein, und zwar: 1. an dem festgehaltenen Punkte $x = 0$, 2. an einem Punkte c ($\leq a$). Legt man die Stützung in das Ende des Stabes ($c = a$), dann wird die Aufgabe besonders einfach, aber gerade die Willkürlichkeit des Stützpunktes macht sie interessant.

Es muß jetzt die Gleichgewichtsbedingung für einen Randstab aufgestellt werden. Die im Punkte c wirkende Stützkraft, positiv im Sinne positiver z gerechnet, heiße P .

Das Moment der auf den Stabteil $x \leq \xi \leq a$ wirkenden, stetig verteilten Kräfte um den Querschnitt x ist

$$\int_x^a \left(g(\xi) + T \frac{dz(\xi)}{dn} \right) (\xi - x) d\xi,$$

so um den Querschnitt 0:

$$\int_0^a \left(g(\xi) + T \frac{dz(\xi)}{dn} \right) \xi d\xi.$$

Das dieses Moment durch das Moment cP der Stützkraft P aufgehoben werden muß, ergibt sich

$$P = -\frac{1}{c} \int_0^a \left(g(\xi) + T \frac{dz(\xi)}{dn} \right) \xi d\xi.$$

Das Biegemoment $M(x)$ ist entgegengesetzt gleich dem Moment an den Querschnitt x der sämtlichen an dem Stücke $x \leq \xi \leq a$ aufstehenden Kräfte. Es sind daher zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem x diesseits oder jenseits des Stützpunktes c liegt.

$$(a) \quad 0 \leq x \leq c.$$

$$\begin{aligned} M(x) &= P(c-x) + \int_x^a \left(g(\xi) + T \frac{dz(\xi)}{dn} \right) (\xi - x) d\xi \\ &= -\left(1 - \frac{x}{c}\right) \int_0^a \left(g(\xi) + T \frac{dz(\xi)}{dn} \right) \xi d\xi + \int_x^a \left(g(\xi) + T \frac{dz(\xi)}{dn} \right) (\xi - x) d\xi \\ &= -\int_0^x \left(g(\xi) + T \frac{dz(\xi)}{dn} \right) \left(1 - \frac{x}{c}\right) \xi d\xi - \int_x^a \left(g(\xi) + T \frac{dz(\xi)}{dn} \right) x \left(1 - \frac{x}{c}\right) d\xi, \end{aligned}$$

$$(b) \quad -M(x) = -\int_0^a \left(g(\xi) + T \frac{dz(\xi)}{dn} \right) K(\xi, x) d\xi,$$

so $K(x, \xi)$ die bekannte Kernfunktion ist:

$$\begin{aligned} K(\xi, x) &= \left(1 - \frac{x}{c}\right) \xi, & 0 \leq \xi \leq x, \\ &= x \left(1 - \frac{\xi}{c}\right), & x \leq \xi. \end{aligned}$$

$$(b) \quad c \leq x \leq a.$$

$$(5b) \quad -M(x) = \int_x^a \left(g(\xi) + T \frac{dz(\xi)}{dn} \right) (\xi - x) d\xi.$$

Diese Ausdrücke sind in (4) einzutragen. Wir betrachten die beiden Randstäbe einzeln. Dem oberen ($y = +b$) geben wir den Index 1, dem unteren ($y = -b$) den Index 2. Die Trägheitsmomente seien demgemäß J_1 und J_2 , während der Elastizitätsmodul für beide Stäbe der gleiche sein soll. Die äußeren Kräfte sind $g_1(x)$ und $g_2(x)$, und wir führen außerdem die Abkürzungen ein

$$(6_1) \quad \begin{aligned} G_1(x) &= \int_0^a K(\xi, x) g_1(\xi) d\xi, & 0 \leq x \leq c, \\ &= - \int_x^a (\xi - x) g_1(\xi) d\xi, & c \leq x \leq a. \end{aligned}$$

$$(6_2) \quad \begin{aligned} G_2(x) &= \int_0^a K(\xi, x) g_2(\xi) d\xi, & 0 \leq x \leq c, \\ &= - \int_x^a (\xi - x) g_2(\xi) d\xi, & c \leq x \leq a. \end{aligned}$$

Die Funktionen G_1 und G_2 sind überall stetig, ihre Tangenten haben am Punkte $x = c$ einen Sprung, sonst sind die Funktionen stetig differenzierbar.

Am oberen Rand ist

$$\left(\frac{dz}{dn} \right)_1 = - \frac{\partial z}{\partial y},$$

am unteren Rande

$$\left(\frac{dz}{dn} \right)_2 = + \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Die Differentialgleichung (4) der Biegelinie lautet daher für den Rand 1:

$$\begin{aligned} EJ_1 \frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} &= -G_1(x) + T \int_0^a \frac{\partial z_1(\xi)}{\partial y} K(\xi, x) d\xi, & 0 \leq x \leq c, \\ &= -G_1(x) - T \int_x^a \frac{\partial z_1(\xi)}{\partial y} (\xi - x) d\xi, & c \leq x \leq a. \end{aligned}$$

Hierin ersetzen wir nach (1) auf der linken Seite $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ durch $-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ und setzen

$$(7) \quad \frac{\partial z}{\partial y} = w.$$

¹⁾ Der Gedanke rührt von Herrn Lichtenstein her.

Dann befriedigt auch w die *Differentialgleichung*

$$\Delta w = 0,$$

er ist an dem festgehaltenen Rand

$$w = 0 \quad \text{für} \quad x = 0,$$

dem freien Rand, wegen

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right),$$

$$(I) \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{für} \quad x = a,$$

an den beiden Randstäben

$$\left. \begin{aligned} EJ_1 \frac{\partial w}{\partial y} &= G_1(x) - T \int_0^a K(\xi, x) w(\xi) d\xi, & 0 \leq x \leq c \\ &= G_1(x) + T \int_x^a (\xi - x) w(\xi) d\xi, & c \leq x \leq a \end{aligned} \right\} y = +b,$$

$$\left. \begin{aligned} EJ_2 \frac{\partial w}{\partial y} &= G_2(x) + T \int_0^a K(\xi, x) w(\xi) d\xi, & 0 \leq x \leq c \\ &= G_2(x) - T \int_x^a (\xi - x) w(\xi) d\xi, & c \leq x \leq a \end{aligned} \right\} y = -b.$$

Die Integration der Differentialgleichung (I) mit den Randbedingungen (II)–(V) ist die Aufgabe, die wir zu lösen haben.

Neuartig sind die Randbedingungen (IV) und (V) von integro-differen-
tiallem Charakter. Die Spannung T tritt darin als linearer Parameter auf.

Für $c = a$ vereinfachen sich die Bedingungen zu

$$\begin{aligned} \text{Va)} \quad EJ_1 \frac{\partial w}{\partial y} &= G_1(x) - T \int_0^a K(\xi, x) w(\xi) d\xi, & y = +b, \\ \text{Va)} \quad EJ_2 \frac{\partial w}{\partial y} &= G_2(x) + T \int_0^a K(\xi, x) w(\xi) d\xi, & y = -b. \end{aligned}$$

Der Kern ist dann $K(\xi, x)$, eine symmetrische Funktion. Im all-
gemeinen Falle aber ist der Kern unsymmetrisch, und das bedingt wesentliche
Schwierigkeiten bei dem Eindeutigkeitsbeweis. Weniger wird die formel-
mäßige Lösung der Aufgabe durch die Wahl von c beeinflusst. Sie ist in
den Fällen mittels Fourierscher Reihen leicht herzustellen.

Wenn w gefunden ist, ergibt sich die Ausbauchung z durch Quadratur nach y . Die hierbei auftretende willkürliche Funktion $F(x)$ von x bestimmt sich folgendermaßen: Mit w sind die rechten Seiten der Gleichungen (5) d. h. die Bieugungsmomente der Randstäbe völlig als Funktionen von x bekannt. Die Gleichung (4) zusammen mit den Stützbedingungen bei $x=0$ und $x=c$ bestimmt dann die Biegungslinie jedes Randstabes eindeutig; $F'(x)$ berechnet sich dadurch, daß z. B. am Rande 1 die Ausbauchung der Membran gleich der Biegungslinie des Randstabes sein muß.

Über die Eindeutigkeit von w mache ich schon hier einige Angaben, die ich im Abschnitt II beweisen werde. Bei jedem c besteht eine abzählbare Anzahl gegen Unendlich sich häufender *Eigenwerte* T , für die das Problem bei *willkürlichen* G_1 und G_2 *keine* Lösung, dagegen für $G_1 = G_2 = 0$ *eine von Null verschiedene* Lösung hat. Für alle anderen Werte T existiert w bei willkürlichem G_1, G_2 und ist *eindeutig bestimmt*.

Die Eigenwerte sind im Falle $c=a$ negativ-reell. Dies läßt sich nach üblichen Methoden beweisen. Für $c < a$ aber versagen diese Methoden völlig. Ich kann jedoch die Gleichung, deren Wurzeln die Eigenwerte sind, explizit aufstellen und mit Hilfe einer asymptotischen Methode diskutieren. Es gibt auch hier unendlich viele negativ-reelle Eigenwerte, außerdem aber unendlich viele komplexe. In genügender Entfernung vom Nullpunkt läßt sich ihre Lage dadurch beschreiben, daß sie negativen Realteil haben, und daß ihre Imaginärteile von der Ordnung der Logarithmen der Realteile sind. Sehr merkwürdig ist schließlich das Auftreten positiv-reeller Eigenwerte in endlicher Zahl.

§ 2.

Integration durch Fourier-Reihen.

Die allgemeinste Integral der Gleichung (I) von der Produktform $X(x)Y(y)$, das die Randbedingungen (II) und (III) erfüllt, hat die Gestalt

$$(8) \quad W^{(n)}(x, y) = \left(A_n \operatorname{Cos} \frac{(2n+1)\pi}{2a} y + B_n \operatorname{Sin} \frac{(2n+1)\pi}{2a} y \right) \sin \frac{(2n+1)\pi}{2a} x$$

bei ganzzahligem n und willkürlichen Konstanten A_n, B_n . Wir setzen demgemäß

$$(9) \quad w(x, y) = \sum_0^{\infty} W^{(n)}(x, y)$$

und tragen diesen Ausdruck in (IV) und (V) ein. Mit Hilfe der Formeln

$$\int_0^a K(\xi, x) \sin \frac{(2n+1)\pi}{2a} \xi d\xi = \left(\frac{2a}{(2n+1)\pi} \right)^2 \left[\sin \frac{(2n+1)\pi}{2a} x - (-1)^n \frac{x}{c} \right],$$

$$(\xi - x) \sin \frac{(2n+1)\pi}{2a} \xi d\xi = - \left(\frac{2a}{(2n+1)\pi} \right)^2 \left[\sin \frac{(2n+1)\pi}{2a} x - (-1)^n \right]$$

alten wir für die Koeffizienten A_n und B_n die beiden Gleichungen:

$$\frac{\pi}{2a} \sum_0^{\infty} \left((2n+1) A_n \operatorname{Sin} \frac{(2n+1)\pi}{2} \frac{b}{a} + (2n+1) B_n \operatorname{Cos} \frac{(2n+1)\pi}{2} \frac{b}{a} \right) \sin \frac{(2n+1)\pi}{2a} x$$

$$= f_1(x) - T \left(\frac{2a}{\pi} \right)^2 \sum_0^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \left(A_n \operatorname{Cos} \frac{(2n+1)\pi}{2} \frac{b}{a} + B_n \operatorname{Sin} \frac{(2n+1)\pi}{2} \frac{b}{a} \right) \sin \frac{(2n+1)\pi}{2a} x$$

$$\left(\frac{2a}{\pi} \right)^2 \frac{x}{c} \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)^3} \left(A_n \operatorname{Cos} \frac{(2n+1)\pi}{2} \frac{b}{a} + B_n \operatorname{Sin} \frac{(2n+1)\pi}{2} \frac{b}{a} \right), \quad 0 \leq x \leq c,$$

$$= f_1(x) - T \left(\frac{2a}{\pi} \right)^2 \sum_0^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \left(A_n \operatorname{Cos} \frac{(2n+1)\pi}{2} \frac{b}{a} + B_n \operatorname{Sin} \frac{(2n+1)\pi}{2} \frac{b}{a} \right) \sin \frac{(2n+1)\pi}{2a} x$$

$$\left(\frac{2a}{\pi} \right)^2 \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)^3} \left(A_n \operatorname{Cos} \frac{(2n+1)\pi}{2} \frac{b}{a} + B_n \operatorname{Sin} \frac{(2n+1)\pi}{2} \frac{b}{a} \right), \quad c \leq x \leq a.$$

$$\frac{\pi}{2a} \sum_0^{\infty} \left(-(2n+1) A_n \operatorname{Sin} \frac{(2n+1)\pi}{2} \frac{b}{a} + (2n+1) B_n \operatorname{Cos} \frac{(2n+1)\pi}{2} \frac{b}{a} \right) \sin \frac{(2n+1)\pi}{2a} x$$

$$= f_2(x) + T \left(\frac{2a}{\pi} \right)^2 \sum_0^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \left(A_n \operatorname{Cos} \frac{(2n+1)\pi}{2} \frac{b}{a} - B_n \operatorname{Sin} \frac{(2n+1)\pi}{2} \frac{b}{a} \right) \sin \frac{(2n+1)\pi}{2a} x$$

$$\left(\frac{2a}{\pi} \right)^2 \frac{x}{c} \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)^3} \left(A_n \operatorname{Cos} \frac{(2n+1)\pi}{2} \frac{b}{a} - B_n \operatorname{Sin} \frac{(2n+1)\pi}{2} \frac{b}{a} \right), \quad 0 \leq x \leq c,$$

$$= f_2(x) + T \left(\frac{2a}{\pi} \right)^2 \sum_0^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \left(A_n \operatorname{Cos} \frac{(2n+1)\pi}{2} \frac{b}{a} - B_n \operatorname{Sin} \frac{(2n+1)\pi}{2} \frac{b}{a} \right) \sin \frac{(2n+1)\pi}{2a} x$$

$$T \left(\frac{2a}{\pi} \right)^2 \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)^3} \left(A_n \operatorname{Cos} \frac{(2n+1)\pi}{2} \frac{b}{a} - B_n \operatorname{Sin} \frac{(2n+1)\pi}{2} \frac{b}{a} \right), \quad c \leq x \leq a.$$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich die A_n , B_n als lineare Funktionen leicht bestimmbarer Fourierkoeffizienten. Wir setzen nämlich:

$$= \left((2n+1) E J_1 \frac{\pi}{2a} \operatorname{Sin} \frac{(2n+1)\pi}{2} \frac{b}{a} + \frac{1}{(2n+1)^3} T \left(\frac{2a}{\pi} \right)^2 \operatorname{Cos} \frac{(2n+1)\pi}{2} \frac{b}{a} \right) A_n$$

$$+ \left((2n+1) E J_1 \frac{\pi}{2a} \operatorname{Cos} \frac{(2n+1)\pi}{2} \frac{b}{a} + \frac{1}{(2n+1)^3} T \left(\frac{2a}{\pi} \right)^2 \operatorname{Sin} \frac{(2n+1)\pi}{2} \frac{b}{a} \right) B_n$$

$$= r'_n A_n + s'_n B_n,$$

$$= \left((-1)^n \frac{1}{(2n+1)^3} T \left(\frac{2a}{\pi} \right)^2 \operatorname{Cos} \frac{(2n+1)\pi}{2} \frac{b}{a} \right) A_n$$

$$+ \left((-1)^n \frac{1}{(2n+1)^3} T \left(\frac{2a}{\pi} \right)^2 \operatorname{Sin} \frac{(2n+1)\pi}{2} \frac{b}{a} \right) B_n = \varrho_n A_n + \sigma_n B_n;$$

$$(11_2) \left\{ \begin{aligned} c_n'' &= - \left((2n+1) E J_2 \frac{\pi}{2a} \operatorname{Sin} \frac{(2n+1)\pi b}{2a} + \frac{1}{(2n+1)^2} T \left(\frac{2a}{\pi} \right)^2 \operatorname{Cos} \frac{(2n+1)\pi}{2} \right. \\ &\quad \left. + \left((2n+1) E J_2 \frac{\pi}{2a} \operatorname{Cos} \frac{(2n+1)\pi b}{2a} + \frac{1}{(2n+1)^2} T \left(\frac{2a}{\pi} \right)^2 \operatorname{Sin} \frac{(2n+1)\pi}{2} \right) \right. \\ &= - r_n'' A_n + s_n'' B_n, \\ \gamma_n'' &= - \left((-1)^n \frac{1}{(2n+1)^2} T \left(\frac{2a}{\pi} \right)^2 \operatorname{Cos} \frac{(2n+1)\pi b}{2a} \right) A_n \\ &\quad + \left((-1)^n \frac{1}{(2n+1)^2} T \left(\frac{2a}{\pi} \right)^2 \operatorname{Sin} \frac{(2n+1)\pi b}{2a} \right) B_n = - \varrho_n A_n + \sigma_n B_n; \end{aligned} \right.$$

und außerdem

$$(12) \quad \sum_0^x \gamma_n' = \alpha', \quad \sum_0^x \gamma_n'' = \alpha''.$$

Dann läßt sich das Gleichungssystem (10) so schreiben:

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_0^\infty c_n' \sin \frac{(2n+1)\pi}{2a} x &= G_1(x) + \alpha' V(x), \\ \sum_0^\infty c_n'' \sin \frac{(2n+1)\pi}{2a} x &= G_2(x) + \alpha'' V(x), \end{aligned} \right.$$

wo

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} V(x) &= \frac{x}{c}, & 0 \leq x \leq c, \\ &= 1, & c \leq x \leq a. \end{aligned} \right.$$

Fassen wir zunächst die Größen α' , α'' als Parameter auf, so berechnen sich aus (13) die c' , c'' . Man schreibe nämlich die Fourier-Entwicklungen

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} G_1(x) &= \sum_0^\infty u_n' \sin \frac{(2n+1)\pi}{2a} x, \\ G_2(x) &= \sum_0^\infty u_n'' \sin \frac{(2n+1)\pi}{2a} x, \\ V(x) &= \sum_0^\infty v_n \sin \frac{(2n+1)\pi}{2a} x, \end{aligned} \right.$$

dann wird

$$(16) \quad c_n' = u_n' + \alpha' v_n, \quad c_n'' = u_n'' + \alpha'' v_n.$$

Nun sind aber α' und α'' selbst wieder Summen der A_n , B_n , also auch der c_n' , c_n'' . Zur völligen Lösung unserer Aufgabe haben wir also noch diese Größen zu ermitteln.

Dazu lösen wir zuerst die Gleichungen

$$1) \quad c'_n = r'_n A_n + s'_n B_n, \quad c''_n = -r''_n A_n + s''_n B_n$$

nach A_n und B_n auf und erhalten

$$7) \quad A_n = \frac{1}{d_n} (s''_n c'_n - s'_n c''_n), \quad B_n = \frac{1}{d_n} (r''_n c'_n + r'_n c''_n), \quad d_n = r'_n s''_n + s'_n r''_n.$$

Demnach ist

$$= \frac{1}{d_n} [(\varrho_n s''_n + \sigma_n r''_n) c'_n + (-\varrho_n s'_n + \sigma_n r'_n) c''_n] = \frac{1}{d_n} (\varphi'_n c'_n + \psi'_n c''_n),$$

$$= \frac{1}{d_n} [(-\varrho_n s''_n + \sigma_n r''_n) c'_n + (\varrho_n s'_n + \sigma_n r'_n) c''_n] = \frac{1}{d_n} (\psi''_n c'_n + \varphi''_n c''_n),$$

und, mit Einsatz der Werte (16) der c'_n, c''_n :

$$7'') \quad \begin{cases} \gamma'_n = \frac{1}{d_n} (\varphi'_n u'_n + \psi'_n u''_n) + \frac{\varphi'_n v_n}{d_n} \alpha' + \frac{\psi'_n v_n}{d_n} \alpha'', \\ \gamma''_n = \frac{1}{d_n} (\psi''_n u'_n + \varphi''_n u''_n) + \frac{\psi''_n v_n}{d_n} \alpha' + \frac{\varphi''_n v_n}{d_n} \alpha''. \end{cases}$$

Summation aller dieser Gleichungen ergibt nach (12):

$$8) \quad \begin{cases} \alpha' = \sum_0^{\infty} \frac{1}{d_n} (\varphi'_n u'_n + \psi'_n u''_n) + \alpha' \sum_0^{\infty} \frac{\varphi'_n v_n}{d_n} + \alpha'' \sum_0^{\infty} \frac{\psi'_n v_n}{d_n}, \\ \alpha'' = \sum_0^{\infty} \frac{1}{d_n} (\psi''_n u'_n + \varphi''_n u''_n) + \alpha' \sum_0^{\infty} \frac{\psi''_n v_n}{d_n} + \alpha'' \sum_0^{\infty} \frac{\varphi''_n v_n}{d_n}. \end{cases}$$

Die Summen sind absolut konvergent. Denn es ist:

$$9a) \quad d_n = \left[(2n+1)^2 J_1 J_2 E^2 \left(\frac{\pi}{2a} \right)^2 + \frac{1}{(2n+1)^4} T^2 \left(\frac{2a}{\pi} \right)^4 \right] \sin (2n+1) \pi \frac{b}{a}$$

$$+ \frac{1}{2n+1} (J_1 + J_2) E T \frac{2a}{\pi} \operatorname{Cof} (2n+1) \pi \frac{b}{a},$$

$$= (-1)^n \frac{1}{2n+1} T \frac{2a}{\pi} \left[E J_2 \operatorname{Cof} (2n+1) \pi \frac{b}{a} + \left(\frac{2a}{\pi} \right)^3 \frac{T}{(2n+1)^3} \sin (2n+1) \pi \frac{b}{a} \right]$$

$$\alpha' = -(-1)^n \frac{1}{2n+1} E J_1 T \frac{2a}{\pi},$$

$$\alpha'' = -(-1)^n \frac{1}{2n+1} E J_2 T \frac{2a}{\pi},$$

$$\alpha' = (-1)^n \frac{1}{2n+1} T \frac{2a}{\pi} \left[E J_1 \operatorname{Cof} (2n+1) \pi \frac{b}{a} + \left(\frac{2a}{\pi} \right)^3 \frac{T}{(2n+1)^3} \sin (2n+1) \pi \frac{b}{a} \right]$$

$$9c) \quad v_n = \frac{8}{(2n+1)^2 \pi^2 c} \sin \frac{(2n+1) \pi c}{2a},$$

und die u'_n, u''_n sind als Fourierkoeffizienten einer stetigen, differenzierbaren Funktion mit nur einem Tangentensprung, ebenso wie v_n , von der Ordnung $\frac{1}{(2n+1)^3}$. Die Glieder der Reihen nehmen daher ab wie $\frac{1}{(2n+1)^3}$.

Aus den beiden linearen Gleichungen (18) berechnen sich α' und α'' und damit sind dann auch die Koeffizienten c'_n , c''_n und schließlich die gesuchten A_n , B_n gefunden. Nach dem oben Bemerkten sind, gemäß (16), die Koeffizienten c'_n , c''_n von der Größenordnung $\frac{1}{(2n+1)^2}$. Für die A_n , B_n ergibt sich daraus, infolge von (11), (17) und (19a), die Größenordnung

$$\frac{1}{(2n+1)^2} e^{-n\pi \frac{b}{a}}. \text{ Die Reihe}$$

$$(9) \quad w(x, y) = \sum_0^{\infty} W^{(n)}(x, y)$$

ist daher in der ganzen Membran und auf dem Rande nebst ihren ersten Ableitungen absolut und gleichmäßig konvergent. Daraus folgt erstens, daß sie alle Randbedingungen befriedigt, zweitens, daß das Kurvenintegral

$$\int \frac{dw}{dn} ds,$$

erstreckt über jede geschlossene Kurve der Membran, verschwindet. Diese Eigenschaft genügt aber bekanntlich zu dem Nachweis, daß w der Differentialgleichung

$$(I) \quad \Delta w = 0$$

genügt.

Die Funktion w löst also unsere Aufgabe.

Ihre Existenz beruht aber auf zwei Voraussetzungen:

1. müssen die Gleichungen (11) nach den A_n , B_n auflösbar sein,
2. müssen sich α' und α'' aus den Gleichungen (18) berechnen lassen.

Für die Gleichungen (18) ist die Determinante

$$(20) \quad \Delta = \left(1 - \sum_0^{\infty} \frac{\varphi'_n v_n}{d_n}\right) \left(1 - \sum_0^{\infty} \frac{\varphi''_n v_n}{d_n}\right) - \sum_0^{\infty} \frac{\psi'_n v_n}{d_n} \sum_0^{\infty} \frac{\psi''_n v_n}{d_n}$$

maßgebend.

Ein Gleichungspaar

$$(11) \quad c'_N = r'_N A_N + s'_N B_N, \quad c''_N = -r''_N A_N + s''_N B_N$$

ist dann nicht nach A_N , B_N auflösbar, wenn die Determinante d_N verschwindet. Nun treten die d_n in Δ als Nenner auf. Man kann daher die Entscheidung über die Existenz der Funktion $w(x, y)$ allein von Δ abhängig machen. Ich will dazu diejenigen Werte T , für die ein Nenner d_N verschwindet, als „mögliche Pole“ von Δ bezeichnen²⁾.

²⁾ „Mögliche“ Pole zum Unterschied von den tatsächlichen Polen. Denn Δ kann an der Nullstelle eines d_N endlich bleiben. Auf dieses besondere Vorkommnis wird es im folgenden gerade ankommen.

Für alle Werte T mit Ausnahme der Nullstellen und der möglichen von Δ existiert bei beliebigen äußeren Kräften g_1, g_2 eine stetige Verformung w der Membran und wird durch die Reihe (9) gegeben.

Die Nullstellen von Δ sind Eigenwerte; für sie hat das Randwertproblem bei verschwindenden äußeren Kräften von Null verschiedene Lösungen, die lineare Reihen bilden. Und zwar unterscheiden sich im allgemeinen die Nulllösungen nur um einen konstanten Faktor. In Sonderfällen, wenn auch noch die Unterdeterminanten von Δ verschwinden, setzen sich linear mit konstanten Koeffizienten aus zwei Lösungen zusammen.

Die möglichen Pole werden im nächsten Paragraphen untersucht werden. Hier soll noch eine Bemerkung über die Determinante

$$\Delta = \Delta(T)$$

gefügt werden.

Falls die beiden Randstäbe gleiches Trägheitsmoment

$$J_1 = J_2 = J$$

haben, gestattet Δ eine wesentliche formale Vereinfachung. Dann ist nämlich

$$\begin{aligned} r'_n &= r''_n = r_n, & s'_n &= s''_n = s_n, \\ \varphi'_n &= \varphi''_n = \varphi_n, & \psi'_n &= \psi''_n = \psi_n, \\ d_n &= 2r_n s_n, \end{aligned}$$

und Δ zerfällt in zwei Linearfaktoren

$$\begin{aligned} &= \left(1 - \sum_0^\infty \frac{\varphi_n v_n}{d_n}\right)^2 - \left(\sum_0^\infty \frac{\psi_n v_n}{d_n}\right)^2 = \left\{1 - \sum_0^\infty \frac{(\varphi_n + \psi_n) v_n}{d_n}\right\} \left\{1 - \sum_0^\infty \frac{(\varphi_n - \psi_n) v_n}{d_n}\right\} \\ &= \left\{1 - \sum_0^\infty \frac{\sigma_n v_n}{s_n}\right\} \left\{1 - \sum_0^\infty \frac{\varrho_n v_n}{r_n}\right\}. \end{aligned}$$

Setzen wir für $r_n, s_n, \varrho_n, \sigma_n, v_n$ die Werte ein, so wird

$$\begin{aligned} & - \sum \frac{\sigma_n v_n}{s_n} = 1 - \\ & \frac{(-1)^n \frac{1}{(2n+1)^2} T \left(\frac{2a}{\pi}\right)^2 \operatorname{Sin} \frac{(2n+1)\pi}{2} \frac{b}{a}}{+1) EJ \frac{\pi}{2a} \operatorname{Cos} \frac{(2n+1)\pi}{2} \frac{b}{a} + \frac{1}{(2n+1)^2} T \left(\frac{2a}{\pi}\right)^2 \operatorname{Sin} \frac{(2n+1)\pi}{2} \frac{b}{a} \frac{1}{(2n+1)^2} \frac{8a}{\pi^2 c} \sin \frac{(2n+1)\pi}{2} \frac{c}{a}} \\ & = \frac{8a}{\pi^2 c} \frac{\pi^2 c}{8a} - \\ & \frac{\frac{1}{(2n+1)^2} T \left(\frac{2a}{\pi}\right)^2 \operatorname{Sin} \frac{(2n+1)\pi}{2} \frac{b}{a}}{+1) EJ \frac{\pi}{2a} \operatorname{Cos} \frac{(2n+1)\pi}{2} \frac{b}{a} + \frac{1}{(2n+1)^2} T \left(\frac{2a}{\pi}\right)^2 \operatorname{Sin} \frac{(2n+1)\pi}{2} \frac{b}{a} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos \frac{(2n+1)\pi}{2} \frac{a-c}{a}} \end{aligned}$$

$$1 - \sum \frac{\varrho_n v_n}{r_n} = 1 -$$

$$\sum \frac{(-1)^n \frac{1}{(2n+1)^2} T \left(\frac{2a}{\pi} \right)^2 \mathfrak{E} \mathfrak{of} \frac{(2n+1)\pi}{2} \frac{b}{a}}{(2n+1) E J \frac{\pi}{2a} \mathfrak{S} \mathfrak{in} \frac{(2n+1)\pi b}{2a} + \frac{1}{(2n+1)^2} T \left(\frac{2a}{\pi} \right)^2 \mathfrak{E} \mathfrak{of} \frac{(2n+1)\pi b}{2a} (2n+1)^2 \frac{1}{\pi^2 c} \sin \frac{(2n+1)\pi}{2}} = \frac{8}{\pi^2 c} \frac{a}{c} \left[\frac{\pi^2 c}{8a} -$$

$$\sum \frac{\frac{1}{(2n+1)^2} T \left(\frac{2a}{\pi} \right)^2 \mathfrak{E} \mathfrak{of} \frac{(2n+1)\pi}{2} \frac{b}{a}}{(2n+1) E J \frac{\pi}{2a} \mathfrak{S} \mathfrak{in} \frac{(2n+1)\pi b}{2a} + \frac{1}{(2n+1)^2} T \left(\frac{2a}{\pi} \right)^2 \mathfrak{E} \mathfrak{of} \frac{(2n+1)\pi b}{2a} (2n+1)^2 \cos \frac{(2n+1)\pi}{2}}$$

Die Gleichung $\Delta = 0$ zerfällt also für $J_1 = J_2$ in zwei Gleichungen, die wir unter Einführung der dimensionslosen Größe

$$(21) \quad t = \frac{T}{EJ} \left(\frac{2a}{\pi} \right)^2$$

schließlich in folgender Gestalt schreiben wollen:

$$(22a) \quad \mathfrak{I}(t) \equiv \frac{\pi^2 c}{8a} - \sum \frac{\frac{1}{(2n+1)^2} t \mathfrak{I} \mathfrak{g} \frac{(2n+1)\pi}{2} \frac{b}{a}}{(2n+1) + \frac{1}{(2n+1)^2} t \mathfrak{I} \mathfrak{g} \frac{(2n+1)\pi b}{2a} (2n+1)^2 \cos \frac{(2n+1)\pi a-c}{2a}} =$$

$$(22b) \quad \mathfrak{E}(t) \equiv \frac{\pi^2 c}{8a} - \sum \frac{\frac{1}{(2n+1)^2} t \mathfrak{E} \mathfrak{ot} \frac{(2n+1)\pi}{2} \frac{b}{a}}{(2n+1) + \frac{1}{(2n+1)^2} t \mathfrak{E} \mathfrak{ot} \frac{(2n+1)\pi b}{2a} (2n+1)^2 \cos \frac{(2n+1)\pi a-c}{2a}} =$$

Für diesen Sonderfall sind verschiedene Fragen über Verteilung der Eigenwerte erheblich einfacher und übersichtlicher zu beantworten als für den allgemeinen Fall. Darin beruht seine Bedeutung für den Fortgang der Arbeit.

Hier soll noch die Einführung der dimensionslosen Größe t in das allgemeine Δ vorgenommen werden. Dazu setzen wir

$$(21') \quad J_1 = p_1 J, \quad J_2 = p_2 J, \quad p_1 p_2 = 1$$

und definieren mit Hilfe dieses J die Größe t durch die Formel (21). Es wird dann

$$\left. \begin{aligned} \frac{\varphi'_n}{d_n} &= \frac{(-1)^n \frac{t}{2n+1} \left[p_2 \operatorname{Co}t(2n+1)\pi \frac{b}{a} + \frac{t}{(2n+1)^3} \right]}{(2n+1)^2 + \frac{t}{2n+1} (p_1 + p_2) \operatorname{Co}t(2n+1)\pi \frac{b}{a} + \frac{t^2}{(2n+1)^4}} \\ &= (-1)^n \left(1 - \frac{(2n+1)^2 + \frac{t}{2n+1} p_1 \operatorname{Co}t(2n+1)\pi \frac{b}{a}}{(2n+1)^2 + \frac{t}{2n+1} (p_1 + p_2) \operatorname{Co}t(2n+1)\pi \frac{b}{a} + \frac{t^2}{(2n+1)^4}} \right) \\ \frac{\psi'_n}{d_n} &= - \frac{(-1)^n \frac{t}{2n+1} p_1 \frac{1}{\operatorname{Sin}(2n+1)\pi \frac{b}{a}}}{(2n+1)^2 + \frac{t}{2n+1} (p_1 + p_2) \operatorname{Co}t(2n+1)\pi \frac{b}{a} + \frac{t^2}{(2n+1)^4}} \end{aligned} \right\}$$

den entsprechenden Werten von $\frac{\varphi''_n}{d_n}$ und $\frac{\psi''_n}{d_n}$. Der weitere Einsatz zieht sich genau wie oben und kann hier weggelassen werden.

§ 3.

Die Pole der Determinante Δ .

Es ist zu untersuchen, wie sich unsere bisherigen Entwicklungen ändern, wenn Nenner d_N verschwinden.

Um nicht mit früheren Bezeichnungen in Widerspruch zu geraten, lassen wir T an Stelle des t stehen, schreiben also wieder

$$9a) \quad \left\{ \begin{aligned} d_N &\equiv r'_N s''_N + s_N r''_N \\ &= (2N+1)^2 J_1 J_2 E^2 \left(\frac{\pi}{2a} \right)^2 \operatorname{Sin}(2N+1)\pi \frac{b}{a} \\ &\quad + \frac{1}{2N+1} T (J_1 + J_2) E \frac{2a}{\pi} \operatorname{Co}f(2N+1)\pi \frac{b}{a} \\ &\quad + \frac{1}{(2N+1)^4} T^2 \left(\frac{2a}{\pi} \right)^4 \operatorname{Sin}(2N+1)\pi \frac{b}{a}. \end{aligned} \right.$$

mit wachsendem N nähern sich die Wurzeln T von $d_N = 0$ den Werten

$$-(2N+1)^3 \frac{\pi}{2a} E J_1 \quad \text{und} \quad -(2N+1)^3 \frac{\pi}{2a} E J_2.$$

Demnach können für ein gegebenes T immer nur eine endliche Zahl von Nennern d_N verschwinden. Man sieht auch leicht, daß es nur eine endliche Anzahl von Werten T gibt, die mehrere d_N gleichzeitig zum Verschwinden bringen.

Wir betrachten demgemäß zuerst den Fall, daß nur ein d_N Null wird. Der Index n durchlaufe alle positiven Zahlen mit Ausnahme von N . Dann, in denen der Index N auszulassen ist, werden mit Σ' bezeichnet.

Für alle $n (\neq N)$ gelten dann die Gleichungen (17) und (17'). Für den Index N aber sind die Größen c'_N und c''_N voneinander abhängig. Denn betrachten wir zunächst den Fall ungleicher Trägheitsmomente $J_1 \neq J_2$, so sind für $d_N = 0$ sicher alle vier Größen r'_N, r''_N, s'_N, s''_N von Null verschieden. Die Definitionen (11₁) für r'_N und s'_N zeigen nämlich, daß diese beiden Größen nicht gleichzeitig verschwinden können, und (11₂) liefert das gleiche Ergebnis für r''_N und s''_N . Augenscheinlich aber können bei $J_1 \neq J_2$ nicht r'_N und r''_N , oder s'_N und s''_N gleichzeitig verschwinden. Wäre also etwa $r'_N = 0$, so wäre $s'_N r''_N$ von Null verschieden, im Gegensatz zu der Bedingung $d_N = 0$.

Infolgedessen ist, wegen $d_N = 0$,

$$(24) \quad -\frac{r'_N}{r''_N} = \frac{s'_N}{s''_N} = \mu_N$$

eine endliche Zahl, und die Gleichungen

$$(11) \quad c'_N = r'_N A_N + s'_N B_N, \quad c''_N = -r''_N A_N + s''_N B_N$$

liefern

$$(25') \quad c'_N = \mu_N c''_N.$$

Diese Gleichung, die bisher nur für $J_1 \neq J_2$ abgeleitet ist, gilt aber, wie aus (11) unmittelbar ersichtlich, auch für gleiche Trägheitsmomente, wenn

$$\mu_N = 1 \quad \text{für} \quad r_N = 0$$

$$\mu_N = -1 \quad \text{für} \quad s_N = 0$$

gewählt wird.

Die Beziehung (25') gibt in Verbindung mit (16)

$$(25) \quad c'_N \equiv u'_N + \alpha' v_N = \mu_N (u''_N + \alpha'' v_N) \equiv \mu_N c''_N,$$

oder auch

$$(26) \quad v_N \alpha' - \mu_N v_N \alpha'' = -u'_N + \mu_N u''_N,$$

eine erste Gleichung zwischen α' und α'' .

Die Koeffizienten A_N und B_N sind nur durch die eine Bedingung

$$(11_N) \quad c'_N = r'_N A_N + s'_N B_N$$

gebunden. Fügen wir

$$(11'_N) \quad r'_N = \varrho_N A_N + \sigma_N B_N$$

hinzu, so sind diese beiden Gleichungen immer nach A_N, B_N auflösbar, denn nach (19b) ist

$$\varrho_N s'_N - \sigma_N r'_N = -\psi'_N = (-1)^N \frac{1}{2N-1} \frac{2a}{\pi} E J, T \neq 0.$$

kommt

$$A_N = \frac{-\sigma_N c'_N + s'_N \gamma'_N}{\varrho_N s'_N - \sigma_N r'_N},$$

$$B_N = \frac{\varrho_N c'_N - r'_N \gamma'_N}{\varrho_N s'_N - \sigma_N r'_N},$$

daraus

$$\gamma''_N = \Psi_N c'_N + \Phi_N \gamma'_N$$

$$= \Psi_N v_N \alpha' + \Phi_N \gamma'_N + \Psi_N u'_N,$$

$$\Phi_N = \frac{\varrho_N s'_N + \sigma_N r'_N}{\varrho_N s'_N - \sigma_N r'_N}, \quad \Psi_N = \frac{2 \varrho_N \sigma_N}{\varrho_N s'_N - \sigma_N r'_N}.$$

Mithin sind, nach (17'') und (17'_N),

$$= \sum' \frac{\varphi'_n u'_n + \varphi''_n u''_n}{d_n} + \alpha' \sum' \frac{\varphi'_n v_n}{d_n} + \alpha'' \sum' \frac{\varphi'_n v_n}{d_n} + \gamma'_N,$$

$$= \sum' \frac{\varphi''_n u'_n + \varphi''_n u''_n}{d_n} + \Psi_N u'_N + \alpha' \left\{ \sum' \frac{\varphi''_n v_n}{d_n} + \Psi_N v_N \right\} + \alpha'' \sum' \frac{\varphi''_n v_n}{d_n} + \gamma'_N \Phi_N$$

Diese beiden Gleichungen, zusammen mit (26), bilden ein System von drei linearen Gleichungen für die drei Unbekannten α' , α'' , γ'_N . Sie sind eindeutig lösbar, wenn die Determinante

$$\Delta_N = \begin{vmatrix} 1 - \sum' \frac{\varphi'_n v_n}{d_n} & - \sum' \frac{\varphi'_n v_n}{d_n} & 1 \\ - \sum' \frac{\varphi''_n v_n}{d_n} - \Psi_N v_N & 1 - \sum' \frac{\varphi''_n v_n}{d_n} & \Phi_N \\ v_N & - v_N \mu_N & 0 \end{vmatrix}$$

von Null verschieden ist. In diesem Falle besteht also eine eindeutig definierte Lösung $w(x, y)$ unseres Randwertproblems. Verschwindet aber Δ_N , so ist T Eigenwert in dem früheren Sinne. Bei von Null verschiedenem v_N gibt es, da die Unterdeterminante des Mittelglieds von Δ_N sicher nicht verschwindet, bis auf einen konstanten Faktor nur eine Nulllösung. Bei verschwindendem v_N kann eine zweifache Schar bestehen.

Nun steht Δ_N in engster Beziehung zu Δ , genauer, zu dessen Residuen an den Nullstellen von d_N . Dadurch läßt sich über die neuen Eigenwerte eine vollständige Übersicht gewinnen.

Eine Nullstelle von d_N scheint nach Formel (20) ein zweifacher Pol von Δ zu sein. Dies ist aber nur scheinbar. In der Tat ist der Koeffizient von $\frac{1}{d_N^2}$, abgesehen von dem Faktor v_N^2 :

$$\varphi'_N \varphi''_N - \psi'_N \psi''_N$$

$$= (\varrho_N s''_N + \sigma_N r''_N)(\varrho_N s'_N + \sigma_N r'_N) - (-\varrho_N s'_N + \sigma_N r'_N)(-\varrho_N s''_N + \sigma_N r''_N)$$

$$= 2 \varrho_N \sigma_N d_N,$$

es hebt sich also ein Faktor d_N in Zähler und Nenner weg und bleibt nur ein einfacher Pol übrig.

Wir bilden den Koeffizienten von $\frac{1}{d_N}$ in Δ . Er lautet:

$$(29) \quad R_N = -v_N \left[\varphi'_N \left(1 - \sum' \frac{\varphi''_n v_n}{d_n} \right) + \varphi''_N \left(1 - \sum' \frac{\varphi'_n v_n}{d_n} \right) \right. \\ \left. + \psi'_N \sum' \frac{\psi''_n v_n}{d_n} + \psi''_N \sum' \frac{\psi'_n v_n}{d_n} - 2 \varrho_N \sigma_N v_N \right].$$

Andererseits rechnet sich

$$(27') \quad \Delta_N = -v_N \left[\left(1 - \sum' \frac{\varphi''_n v_n}{d_n} \right) - \mu_N \Phi_N \left(1 - \sum' \frac{\varphi'_n v_n}{d_n} \right) \right. \\ \left. - \mu_N \sum' \frac{\psi''_n v_n}{d_n} + \Phi_N \sum' \frac{\psi'_n v_n}{d_n} - \mu_N \Psi_N v_N \right].$$

Wir behaupten, daß die eckigen Klammern in beiden Ausdrücken bis auf den Faktor φ'_N identisch sind.

Es ist nämlich

$$\mu_N \equiv \frac{s'_N}{s''_N} \equiv -\frac{r'_N}{r''_N} = \frac{\varrho_N s'_N - \sigma_N r'_N}{\varrho_N s''_N + \sigma_N r''_N} = -\frac{\psi'_N}{\varphi'_N},$$

demnach

$$\mu_N \Psi_N = \frac{2 \varrho_N \sigma_N}{\varrho_N s''_N + \sigma_N r''_N} = \frac{2 \varrho_N \sigma_N}{\varphi'_N}$$

und

$$-\mu_N \Phi_N = -\frac{\varrho_N s'_N + \sigma_N r'_N}{\varrho_N s''_N + \sigma_N r''_N} = \frac{\varphi''_N}{\varphi'_N}.$$

Schließlich, gemäß (28) wegen $d_N = 0$,³⁾

$$\Phi_N = -\frac{\varrho_N s'_N + \sigma_N r'_N}{\varrho_N s'_N - \sigma_N r'_N} = \frac{\varphi''_N}{\psi'_N} = \frac{\psi''_N}{\varphi'_N}.$$

Also folgt

$$R_N = \varphi'_N \Delta_N.$$

Mit Δ_N verschwindet also auch R_N , und der „mögliche“ Pol ist in Wahrheit eine reguläre Stelle.

An denjenigen Unendlichkeitsstellen von $\Delta(T)$, an denen nur ein einziges d_N verschwindet, besteht eine eindeutig definierte Lösung $w(x, y)$ des Randwertproblems (die aber in anderer Weise berechnet werden muß als bei endlichem Δ). Hebt sich an einem möglichen Pol, an dem ein einziges d_N verschwindet, die Singularität heraus, so ist die Stelle ein Eigenwert der Randwertaufgabe³⁾.

³⁾ Denn φ'_N kann an einem Nullpunkt von d_N nicht verschwinden, wie sich aus der Identität

$$(-1)^N \varphi'_N = d_N - E J_1 \left(\frac{\pi}{2a} \right)^2 (2N+1)^2 \left[E J_2 \sin(2N+1) \pi \frac{b}{a} + \left(\frac{2a}{\pi} \right)^2 \frac{T}{(2N+1)^2} \cos(2N+1) \right]$$

leicht schließen läßt.

Im Abschnitt II wird gezeigt werden, daß die meromorphe Funktion (T) im Unendlichen verschwindet. Sie muß daher notwendig unendlich viele Pole haben. Es gibt also unendlich viele Wurzeln T einer Gleichung $d_N = 0$, für welche das zugehörige Δ_N von Null verschieden ist.

Falls für einen Wert T mehrere Nenner d_N verschwinden, ist die gleiche Integrationsmethode der Differentialgleichung anwendbar. Verschwinden zwei Nenner d_{N_1} und d_{N_2} , dann besteht eindeutige Lösung oder Eigenwert, je nachdem die Determinante

$$\begin{array}{rcccl} 1 - \sum'' \frac{\varphi_n' v_n}{d_n} & - \sum'' \frac{\varphi_n' v_n}{d_n} & 1 & 1 & \\ - \sum'' \frac{\varphi_n'' v_n}{d_n} - \Psi_{N_1} v_{N_1} - \Psi_{N_2} v_{N_2} & 1 - \sum'' \frac{\varphi_n'' v_n}{d_n} & \Phi_{N_1} & \Phi_{N_2} & \\ v_{N_1} & - v_{N_1} \mu_{N_1} & 0 & 0 & \\ v_{N_2} & - v_{N_2} \mu_{N_2} & 0 & 0 & \\ & = - v_{N_1} v_{N_2} (\Phi_{N_2} - \Phi_{N_1}) (\mu_{N_2} - \mu_{N_1}) & & & \end{array}$$

von Null verschieden ist oder verschwindet. Eine Zusammenhang mit den Residuen von Δ ist nicht ersichtlich. Verschwinden z. B. im Falle gleicher Trägheitsmomente $J_1 = J_2$ gleichzeitig zwei Nenner von $\mathfrak{T}(t)$, so ist die Determinante Null, verschwindet aber ein Nenner von $\mathfrak{T}$ und einer von $\mathfrak{C}$, so hat sie den Wert $4 v_{N_1} v_{N_2}$.

Verschwinden mehr als zwei Nenner, so besteht immer Eigenwert.

§ 4.

Eine Umformung. Hilfsbetrachtungen über einige Fourier-Reihen.

Es gilt die Formel

$$(30) \quad \frac{\pi^2}{8} \frac{c}{a} = \sum \frac{1}{(2n+1)^2} \cos \frac{(2n+1)\pi}{2} \frac{a-c}{a}.$$

Die Formel ist bekannt, soll aber am Schluß dieses Paragraphen zusammen mit einer anderen, die wir später brauchen, nochmals kurz abgeleitet werden.

Mit Hilfe von (30) lassen sich die Reihen für $\mathfrak{T}(t)$ und $\mathfrak{C}(t)$ formal vereinfachen. Es kommt nämlich:

$$(31a) \quad \mathfrak{T}(t) = \sum \frac{1}{(2n+1)^2} \frac{1}{1 + \frac{t}{(2n+1)^2}} \cos(2n+1)\alpha,$$

$$(31b) \quad \mathfrak{C}(t) = \sum \frac{1}{(2n+1)^2} \frac{1}{1 + \frac{t}{(2n+1)^2}} \cos(2n+1)\alpha,$$

wo noch

$$(32) \quad \alpha = \frac{\pi a - c}{2 \frac{a}{a}}, \quad \gamma = \frac{\pi b}{2 \frac{b}{a}}$$

gesetzt ist. Die Formeln (31) sind vor allem von Wert, wenn das Verhalten der Reihen für sehr große t untersucht werden soll. Für numerische Rechnung bei kleineren t sind die Ausdrücke (22) geeigneter.

Dieselbe Umformung läßt sich in anderer Weise herleiten, was zur Abwechslung für die Form des allgemeinen Δ geschehen soll. Aus der zweiten Form der ersten Gleichung (23) folgt nämlich

$$1 - \sum_0^{\infty} \frac{\varphi'_n v_n}{d_n} = 1 - \sum_0^{\infty} (-1)^n v_n + \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{(2n+1)^2 + \frac{t}{2n+1} p_1 \cot(2n+1) \pi \frac{b}{a}}{(2n+1)^3 + \frac{t}{2n+1} (p_1 + p_2) \cot(2n+1) \pi \frac{b}{a} + \frac{t^2}{(2n+1)^4}} v_n.$$

Es ist aber nach Definition [(15) und (14)]

$$\sum_0^{\infty} (-1)^n v_n = V(a) = 1$$

und daher

$$1 - \sum_0^{\infty} \frac{\varphi'_n v_n}{d_n} = \frac{8}{\pi^2 c} \sum_0^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \frac{1 + \frac{t}{(2n+1)^3} p_1 \cot(2n+1) \pi \frac{b}{a}}{1 + \frac{t}{(2n+1)^3} (p_1 + p_2) \cot(2n+1) \pi \frac{b}{a} + \frac{t^2}{(2n+1)^4}} \cos(2n+1) \alpha.$$

Die entsprechende Formel gilt für

$$1 - \sum_0^{\infty} \frac{\varphi''_n v_n}{d_n}.$$

Es sollen jetzt für künftige Anwendung die Werte der trigonometrischen Reihen

$$(33) \quad C(\alpha) = \sum_0^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \cos(2n+1) \alpha,$$

$$S(\alpha) = \sum_0^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \sin(2n+1) \alpha$$

hergeleitet werden.

Sei $z = re^{i\alpha}$ eine komplexe Variable. Aus

$$(a) \quad \sum_0^{\infty} z^{2n} = \frac{1}{1-z^2}, \quad r < 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2} \log \frac{1+z}{1-z}, \quad r < 1,$$

unter $\log$ der Hauptwert zu verstehen ist, der für $z = 0$ verschwindet. ist aber

$$\frac{1+z}{1-z} = \frac{1-r^2+2ir \sin \alpha}{1+r^2-2r \cos \alpha}$$

also

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2} \log(1-r^2+2ir \sin \alpha) - \frac{1}{2} \log(1+r^2-2r \cos \alpha), \quad r < 1.$$

Der letzte Logarithmus ist reell. Der Hauptwert des ersten bestimmt sich leicht. Denn, wird

$$1-r^2+2ir \sin \alpha = Re^{i\Theta}$$

gesetzt, so ist $\operatorname{tg} \Theta = \frac{2r \sin \alpha}{1-r^2}$ und läuft für $0 < \alpha < \pi$ von Null durch positive Werte nach Unendlich, wenn r von Null nach 1 geht. Da aber bei Null beginnt, liegt es zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$.

Die Gleichung (c) gilt auch noch für

$$r = 1, \quad 0 < \alpha < \pi$$

nach dem Abelschen Satz, denn für diese Werte von α ist die linke Seite in (c) konvergent⁴⁾. Für $r = 1$ und $0 < \alpha < \pi$ erhalten wir aber durch Zerlegung in Real- und Imaginärteil:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)\alpha}{2n+1} &= \frac{1}{2} \log(2 \sin \alpha) - \frac{1}{2} \log(2 - 2 \cos \alpha) \\ &= \frac{1}{2} \log \cot \frac{\alpha}{2}, \quad 0 < \alpha < \pi, \end{aligned}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)\alpha}{2n+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}, \quad 0 < \alpha < \pi.$$

Daraus folgt durch Integration:

$$(34a) \quad C(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)\alpha}{(2n+1)^2} = \frac{\pi}{4} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right), \quad 0 \leq \alpha \leq \pi,$$

$$(34b) \quad S(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)\alpha}{(2n+1)^2} = \int_0^{\alpha} \frac{1}{2} \log \cot \frac{\alpha}{2} d\alpha, \quad 0 \leq \alpha \leq \pi.$$

Die Gleichung (30) ist unmittelbar identisch mit (34a), wenn $\frac{\alpha-c}{a} = \alpha$ gesetzt wird.

⁴⁾ Einen eleganten Beweis dieses Satzes hat kürzlich Herr Pólya gegeben. Gött. Nachr. 1918, S. 21–29, siehe auch Landau, Gött. Nachr., 14. Juni 1918.)

Abschnitt II.

§ 1.

Vollständigkeit der Lösung.

Wir haben für unsere Randwertaufgabe eine Lösung der Form

$$(1) \quad w(x, y) = \sum W^{(n)}(x, y) \\ = \sum \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2a} \left(A_n \operatorname{Cof} \frac{(2n+1)\pi y}{2a} + B_n \operatorname{Sin} \frac{(2n+1)\pi y}{2a} \right)$$

hergestellt und gezeigt, daß sie immer existiert, außer wenn der Parameter $2n+1$ einer der in den §§ 2 und 3 gefundenen Eigenwerte ist. Es ist zu zeigen, daß es außer diesen Lösungen keine anderen gibt. Dazu ist nur nachzuweisen, daß jede Lösung $\omega(x, y)$ der Randwertaufgabe die Form (1) haben muß, denn die Berechnung der Koeffizienten ergibt sich aus diesem Ansatz zwangsläufig.

Die Randbedingungen (IV) und (V) fordern folgendes: Es bestehen an den Rändern $y = \pm b$ bei Annäherung im Innern des Rechtecks an jeder Stelle Grenzwerte $\lim_{y \rightarrow \pm b} \omega(x, y)$ und $\lim_{y \rightarrow \pm b} \frac{\partial \omega}{\partial y}(x, y)$ und zwischen ihnen bestehen die Beziehungen (IV) bzw. (V), die sich in die allgemeine Form

$$\frac{\partial \omega}{\partial y} = G(x) + \int_0^a \mathfrak{L}(\xi, x) \omega(\xi) d\xi$$

einfügen, wo $\mathfrak{L}(\xi, x)$ eine stetige Funktion ihrer beiden Veränderlichen ist. Wir wollen darüber hinaus annehmen, daß die Konvergenz der $\lim \omega(x, y)$ und $\lim \frac{\partial \omega(x, y)}{\partial y}$ gleichmäßig in x ist⁵⁾. Dann ist $\frac{\partial \omega}{\partial y}$ sicher stetig.

Also läßt sich $\omega(x, y)$ auch durch das folgende unter den obigen Annahmen über ω und $\frac{\partial \omega}{\partial y}$ eindeutige Randwertproblem definieren: Die Funktion erfüllt $\Delta \omega = 0$ mit den Randbedingungen $\omega = 0$ für $x = 0$, $\frac{\partial \omega}{\partial y} = 0$ für $x = a$, und hat an den Rändern $y = \pm b$ vorgegebene stetige Normalableitungen.

Daß aber eine so erklärte Funktion immer in der Form (1) dargestellt werden kann, ist wohl bekannt. Zur Vollständigkeit sei ein einfacher

⁵⁾ Die Annahme der gleichmäßigen Stetigkeit der Näherung könnte auch durch die einfachere Annahme der Beschränktheit ersetzt werden.

weis auch hier gegeben. Die gegebenen stetigen Werte der Normalableitungen seien

$$\omega'_1(\xi) \text{ für } y=b, \quad -\omega'_2(\xi) \text{ für } y=-b,$$

es werde

$$= \frac{2}{a} \int_0^a \omega'_1(\xi) \sin \frac{(2n+1)\pi\xi}{2} \frac{\xi}{a} d\xi, \quad d_n = \frac{2}{a} \int_0^a \omega'_2(\xi) \cos \frac{(2n+1)\pi\xi}{2} \frac{\xi}{a} d\xi$$

Bestimmen wir dann die Koeffizienten der Reihe (1) durch

$$A_n = \frac{1}{2n+1} \frac{a}{\pi} \frac{1}{\sin \frac{(2n+1)\pi b}{2} \frac{a}{b}} (c_n - d_n),$$

$$B_n = \frac{1}{2n+1} \frac{a}{\pi} \frac{1}{\cos \frac{(2n+1)\pi b}{2} \frac{a}{b}} (c_n + d_n),$$

ist die Reihe (1) im Innern des Rechtecks konvergent und befriedigt die Differentialgleichung, an den beiden Rändern gehen die Normalableitungen formal in die Fourier-Entwicklungen der ω'_1 und ω'_2 über. Wenn diese beiden Funktionen nach Fourier entwickelbar sind, löst also die durch (1) und (1') definierte Funktion $\Omega(x, y)$ unser neues Randwertproblem, denn die Konvergenz von $\frac{\partial \Omega}{\partial y}$ ist dann im ganzen Rechteck mit Einschluß des Randes gleichmäßig.

Jetzt muß aber noch die Annahme über die Entwickelbarkeit der Funktionen ω'_1 , ω'_2 beseitigt werden.

Dazu benutzen wir den allgemeinen Existenzsatz: Es gibt zu beliebigen stetigen Werten $o'_1(x)$ und $o'_2(x)$ auf den beiden Rändern eine Lösung $o(x, y)$ des neuen Randwertproblems; und wenn sich die Randwerte $o'_1(x)$ und $\bar{o}'_1(x)$, $o'_2(x)$ und $\bar{o}'_2(x)$ im ganzen Intervall $(0, a)$ genügend wenig voneinander unterscheiden, dann ist auch die Differenz der beiden Funktionen $o(x, y)$ und $\bar{o}(x, y)$ in dem ganzen Rechteck beliebig klein.

Dieser Existenzsatz kann als bekannt vorausgesetzt werden. Es seien nun $o'_{1\mu}(x)$, $o'_{2\mu}(x)$ ($\mu = 1, 2, \dots$) zwei Reihen von trigonometrischen Polynomen, die gleichmäßig gegen ω'_1 , ω'_2 konvergieren. Dann ist nach dem Existenzsatz

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} o_\mu(x, y) = \omega(x, y)$$

gleichmäßig im Innern und auf dem Rande des Rechtecks.

Andererseits sind die Funktionen $o_\mu(x, y)$ sicher in der Form (1) darstellbar, und ihre Koeffizienten $A_n^{(\mu)}$, $B_n^{(\mu)}$ konvergieren für jeden Index n mit wachsendem μ gegen A_n , B_n . Daher ist im Innern des Rechtecks sicher

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} o_{\mu}(x, y) = \Omega(x, y)$$

und daher

$$\Omega(x, y) = \omega(x, y),$$

was zu beweisen war.

Werden diese Entwicklungen mit den Ergebnissen des vorigen Abschnitts zusammengenommen, so ergibt sich der Existenzsatz für die Randwertaufgabe I—V:

Die Randwertaufgabe hat bei beliebigen äußeren Kräften g_1, g_2 eine eindeutig bestimmte Lösung $w(x, y)$ für alle Werte des Parameters T mit Ausnahme der Eigenwerte. Für die Eigenwerte gibt es von Null verschiedene Lösungen der Randwertaufgabe bei verschwindenden g_1, g_2 .

Es handelt sich jetzt um die Bestimmung dieser Eigenwerte. Dabei sollen nur die Nullstellen von Δ berücksichtigt werden, da die Wurzeln von Nennern d_n , die Eigenwerte sind, sich ja einfach ermitteln lassen. Insbesondere ist bekannt, daß sie sämtlich negativ-reell sind.

§ 2.

Der Fall $c = a$.

Dieser Fall (Stützung der Stäbe an beiden Enden) muß gesondert behandelt werden. Einerseits nämlich ist er besonders einfach, andererseits versagen für ihn die im allgemeinen Falle gültigen asymptotischen Methoden, und auch die Ergebnisse selbst sind anders.

Wenn $c = a$ ist, sind sämtliche Eigenwerte reell und negativ.

Die Randbedingungen (IV) und (V) bei verschwindenden äußeren Kräften lauten für $c = a$:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} EJ_1 \frac{\partial w}{\partial y} = -T \int_0^a K(\xi, x) w(\xi) d\xi, \\ EJ_2 \frac{\partial w}{\partial y} = +T \int_0^a K(\xi, x) w(\xi) d\xi, \end{array} \right.$$

$$(2') \quad K(\xi, x) = \frac{2a}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin n\pi \frac{\xi}{a} \cdot \sin n\pi \frac{x}{a}.^{a)}$$

Seien T_1 und T_2 zwei Eigenwerte, w_1 und w_2 zugehörige Eigenfunktionen. Wir zeigen, daß die Eigenfunktionen eine Orthogonalitätsbedingung erfüllen.

Der Greensche Satz ergibt nämlich mit Benutzung der Gleichungen (2):

^{a)} Siehe z. B. A. Kneser, Integralgleichungen, Braunschweig 1911, S. 15.

$$\begin{aligned}
 0 &= \int (w_1 \Delta w_2 - w_2 \Delta w_1) de = - \int \left(w_1 \frac{dw_2}{dn} - w_2 \frac{dw_1}{dn} \right) ds \\
 &= - \frac{1}{E J_1} \int_0^a \int_0^a K(\xi, x) (T_2 w_1'(x) w_2'(\xi) - T_1 w_2'(x) w_1'(\xi)) d\xi dx \\
 &\quad - \frac{1}{E J_2} \int_0^a \int_0^a K(\xi, x) (T_2 w_1''(x) w_2''(\xi) - T_1 w_2''(x) w_1''(\xi)) d\xi dx,
 \end{aligned}$$

w_1' , w_2' die Werte am oberen, w_1'' , w_2'' diejenigen am unteren Rand.
Wegen der Symmetrie des Kernes $K(\xi, x)$ ist aber

$$\int_0^a \int_0^a K(\xi, x) w_1(x) w_2(\xi) d\xi dx = \int_0^a \int_0^a K(\xi, x) w_1(\xi) w_2(x) d\xi dx,$$

er erhalten wir nach Division durch den Faktor $-\frac{T_2 - T_1}{E}$:

$$\int_0^a \int_0^a K(\xi, x) \left(\frac{w_1'(x) w_2'(\xi)}{J_1} + \frac{w_1''(x) w_2''(\xi)}{J_2} \right) d\xi dx = 0.$$

Dies ist die *Orthogonalitätsbedingung*, die sich hier allerdings nicht die Eigenfunktionen als solche, sondern auf ihre Randwerte bezieht. wird sofort gezeigt werden, daß das Doppelintegral für konjugiert komplexe Funktionen w_1 , w_2 positiv ist (geringfügige Abänderung der Formel (4')).

Wir schließen daraus in üblicher Weise, daß keine komplexen Eigenwerte auftreten können.

Es bleibt noch die Annahme positiver Eigenwerte zu widerlegen. T ein reeller Eigenwert. Eine bekannte Greensche Formel liefert:

$$\begin{aligned}
 \int \left(\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) de &= -2 \int w \frac{dw}{dn} ds \\
 &= -\frac{2T}{E} \int_0^a \int_0^a K(\xi, x) \left[\frac{w'(x) w'(\xi)}{J_1} + \frac{w''(x) w''(\xi)}{J_2} \right] d\xi dx.
 \end{aligned}$$

Die linke Seite ist positiv, ebenso werden wir das Doppelintegral der rechten Seite als positiv nachweisen. Es ist nämlich nach (2')²⁾

²⁾ Das Integral (4') ist ein einfaches Beispiel eines Integrals, das im Bereich stetigen, durch die Bedingung $\int_0^a w^2 d\xi = 1$ normierten Funktionen $w(\xi)$ eine untere Grenze, aber kein Minimum hat. Denn es gibt keine Funktion w , die sämtliche Integrale $\int_0^a \sin n \pi \frac{\xi}{a} w(\xi) d\xi$ zu Null macht (Abgeschlossenheit des Funktionensystems

$$\begin{aligned}
 (4') \quad & \int_0^a \int_0^a K(\xi, x) w(x) w(\xi) d\xi dx \\
 &= \frac{2a}{\pi^2} \sum_1^\infty \frac{1}{n^2} \int_0^a \int_0^a w(\xi) \sin n\pi \frac{\xi}{a} w(x) \sin n\pi \frac{x}{a} d\xi dx \\
 &= \frac{2a}{\pi^2} \sum_1^\infty \frac{1}{n^2} \left[\int_0^a w(\xi) \sin n\pi \frac{\xi}{a} d\xi \right]^2 > 0.
 \end{aligned}$$

Daher ist T notwendig negativ.

Ein übersichtliches Bild der Verteilung der negativen Eigenwerte erhält man bei gleichen Trägheitsmomenten, $J_1 = J_2 = J$. Suchen wir z. B. die Nullstellen des Faktors $\mathfrak{T}(t)$ der Determinante Δ (Abschnitt I Gl. (31a)). Für $c = a$, d. h. $\alpha = 0$, wird

$$\mathfrak{T}(t) = \sum \frac{1}{(2n+1)^3} \frac{1}{1 + \frac{t}{(2n+1)^3} \mathfrak{E}(2n+1)\gamma}.$$

Die Ableitung

$$\mathfrak{T}'(t) = - \sum \frac{1}{(2n+1)^3} \frac{\mathfrak{E}(2n+1)\gamma}{\left(1 + \frac{t}{(2n+1)^3} \mathfrak{E}(2n+1)\gamma\right)^2}$$

ist für alle reellen Werte von t negativ. An jedem Punkt

$$t_n = -(2n+1)^3 \mathfrak{E}(2n+1)\gamma$$

hat $\mathfrak{T}(t)$ einen einfachen Pol, in der Weise, daß

$$\mathfrak{T}(t_n + 0) > 0, \quad \mathfrak{T}(t_n - 0) < 0$$

ist. Daher liegt zwischen zwei aufeinander folgenden Stellen t_n immer genau eine Nullstelle von $\mathfrak{T}$. Entsprechendes gilt für die Reihe $\mathfrak{E}(t)$. Da die Pole von $\mathfrak{T}(t)$ und $\mathfrak{E}(t)$ mit wachsendem n immer genauer mit den Stellen $-(2n+1)^3$ zusammenfallen, so zeigt sich zusammenfassend: *Bei gleichen Trägheitsmomenten liegen für $c=a$, von einem gewissen n ab, immer genau zwei Eigenwerte zwischen $-(2n+1)^3$ und $-(2n+3)^3$.*

Sind die Trägheitsmomente voneinander verschieden, so ist die Verteilung der Eigenwerte weniger übersichtlich, doch steht das Vorhandensein unendlich vieler reeller negativer Eigenwerte unter allen Umständen fest. Denn als absolut und gleichmäßig konvergente Reihe von Funktionen, die für alle endlichen, von Null verschiedenen Werte p_1 bis auf Pole regulär sind,

$\sin n\pi \frac{\xi}{a}$), andererseits erhält für $w(\xi) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin n\pi \frac{\xi}{a}$ das Integral den Wert $\frac{a^2}{\pi^2} \frac{1}{n^2}$. — Wir kommen auf dieses Verhalten des Integrals in der Fußnote ¹²⁾ S. 257 zurück.

Δ selbst eine bis auf Pole reguläre Funktion von p_1 und t . Greifen wir also irgendeine Nullstelle t von Δ heraus, so ist sie in dem genannten Bereich eine analytische Funktion von p_1 , läßt sich also, von $p_1 = 1$ (gleiche Trägheitsmomente) beginnend, durch den ganzen Bereich fortsetzen. Und die Nullstelle für reelle p_1 keine anderen als reelle, negative Werte annehmen kann, gibt es also für alle Werte der Trägheitsmomente im Falle $c = a$ unendlich viele negative Eigenwerte.

Die sämtlichen Betrachtungen dieses Paragraphen sind auf den Fall $c = a$ beschränkt. Für $c < a$ läßt sich keiner der Schlüsse mehr aufrechterhalten. Wir brauchen dann ganz andere Methoden, die im folgenden miteinander gesetzt werden sollen.

§ 3.

Die Funktion $\Phi(t, \alpha)$.

Unsere weiteren Entwicklungen gründen sich auf das eingehende Studium einer Hilfsfunktion, der Fourier-Reihe

$$b) \quad \Phi(t, \alpha) = \sum_0^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \frac{1}{1 + \frac{t}{(2n+1)^2}} \cos(2n+1)\alpha.$$

Wir werden diese Funktion für alle Werte $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ als Funktion von t untersuchen und hauptsächlich ihre asymptotischen Eigenschaften für große t ins Auge fassen. Dazu dient eine *Differentialgleichung*, die eine Darstellung der Reihe $\Phi(t, \alpha)$ in geschlossener Form ermöglicht.

Wir betrachten neben Φ die kongugierte Reihe

$$b) \quad \Psi(t, \alpha) = \sum_0^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \frac{1}{1 + \frac{t}{(2n+1)^2}} \sin(2n+1)\alpha$$

und fassen zunächst Φ und Ψ bei festem Parameter t als Funktionen von α auf.

Dreimalige Integration von Φ führt zu

$$\int_0^{\alpha} d\beta \int_{\frac{\pi}{2}}^{\beta} d\gamma \int_0^{\gamma} \Phi(t, \delta) d\delta = - \sum_0^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \frac{\frac{1}{(2n+1)^2}}{1 + \frac{t}{(2n+1)^2}} \sin(2n+1)\alpha.$$

Daher ist

$$7) \quad \Psi(t, \alpha) - t \int_0^{\alpha} d\beta \int_{\frac{\pi}{2}}^{\beta} d\gamma \int_0^{\gamma} \Phi(t, \delta) d\delta = \sum_0^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \sin(2n+1)\alpha \\ = \int_0^{\alpha} \frac{1}{2} \log \cot \frac{\alpha}{2} d\alpha,$$

nach Abschn. I, Gl. (34b).

Ebenso wird Ψ dreimal integriert:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} d\beta \int_0^{\beta} d\gamma \int_{\frac{\pi}{2}}^{\gamma} \Psi(t, \delta) d\delta = \sum_0^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \frac{1}{1 + \frac{(2n+1)^3}{t}} \cos(2n+1)\alpha.$$

Daher:

$$(8) \quad \Phi(t, \alpha) + t \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} d\beta \int_0^{\beta} d\gamma \int_{\frac{\pi}{2}}^{\gamma} \Psi(t, \delta) d\delta = \sum_0^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos(2n+1)\alpha \\ = \frac{\pi}{4} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right),$$

nach Abschn. I, Gl. (34 a). Beide Gleichungen gelten im Intervall $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$. Aus ihnen folgt, daß Φ und Ψ für $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ stetige Ableitungen nach α bis zu 6. Ordnung haben, denn Φ und Ψ sind gemäß den Definitionsgleichungen (5) und (6) stetig, und ihre Ableitungen ergeben sich als aus (7) und (8) als Integrale stetiger Funktionen, vermehrt um Differentiaquotienten von Ausdrücken, die sich für $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ analytisch verhalten.

Dreimalige Differentiation von (7) und (8) führt zu dem Differentialgleichungssystem

$$(9a) \quad \Psi'''(t; \alpha) - t \Phi(t; \alpha) = \frac{1}{2} \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha},$$

$$(9b) \quad \Phi'''(t; \alpha) + t \Psi(t; \alpha) = 0,$$

oder zu der Gleichung 6. Ordnung

$$(9) \quad \Phi^{(6)} + t^2 \Phi = -t \frac{1}{2} \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha},$$

wobei die Differentiationen sich auf α beziehen. Das allgemeine Integral dieser Gleichung läßt sich nach der Methode der Variation der Konstanten in folgender Form angeben. Es werde gesetzt:

$$(10) \quad \begin{cases} \lambda_1 = e^{\frac{i\pi}{6}}, & \lambda_2 = e^{\frac{5i\pi}{6}}, & \lambda_3 = e^{\frac{9i\pi}{6}} \\ \lambda_4 = e^{\frac{7i\pi}{6}} = -\lambda_1, & \lambda_5 = e^{\frac{11i\pi}{6}} = -\lambda_2, & \lambda_6 = e^{\frac{15i\pi}{6}} = e^{\frac{8i\pi}{6}} = -\lambda_3, \end{cases}$$

so daß

$$(10') \quad \lambda_1^3 = \lambda_2^3 = \lambda_3^3 = i, \quad \lambda_4^3 = \lambda_5^3 = \lambda_6^3 = -i.$$

Außerdem werde an Stelle von t die neue Veränderliche

$$(11) \quad \tau = t^{\frac{1}{3}}$$

ingeführt. Damit schreibt sich

$$(12) \quad \Phi(t, \alpha) = \sum_{\kappa=1}^6 A_{\kappa}(\tau) e^{\lambda_{\kappa} \tau \alpha} + \Phi_0(t, \alpha),$$

$$(12') \quad \Phi_0(t, \alpha) = \frac{1}{12\tau^2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \frac{\cos \beta}{\sin^2 \beta} \sum_{\kappa=1}^6 \lambda_{\kappa} e^{\lambda_{\kappa} \tau (\alpha - \beta)} d\beta,$$

das Integral längs des endlichen Segments der reellen Achse zu erstrecken. Φ_0 ist eine eindeutige Funktion von t , denn es hat für alle drei Zweige der Wurzelgröße τ den gleichen Wert. Das Integral ist auch für $\alpha = 0$ wohldefiniert, denn der Faktor $\sum_{\kappa=1}^6 \lambda_{\kappa} e^{-\lambda_{\kappa} \tau \beta}$ verschwindet für $\beta = 0$ von 5. Ordnung.

Zur Bestimmung der Funktionen $A_{\kappa}(\tau)$ dienen die Gleichungen (7) und (8) und ihre Ableitungen 1. und 2. Ordnung.

Betrachten wir zuerst die Gleichung (8) und setzen in ihr $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Dann verschwindet das Integral und die rechte Seite; außerdem verschwindet in dem Ausdruck (12) von Φ das Glied $\Phi_0(t, \frac{\pi}{2})$. Es kommt daher einfach

$$(13_0) \quad \sum_{\kappa=1}^6 A_{\kappa}(\tau) e^{\lambda_{\kappa} \tau \frac{\pi}{2}} = 0.$$

Einmalige Differentiation von (8) ergibt

$$\Phi' + t \int_0^{\alpha} d\gamma \int_{\frac{\pi}{2}}^{\gamma} \Psi(t, \delta) d\delta = -\frac{\pi}{4}.$$

Setzt man $\alpha = 0$, so verschwindet das Integral, und die linke Seite erhält nach (12) den Wert

$$\tau \sum_{\kappa=1}^6 \lambda_{\kappa} A_{\kappa}(\tau) + \frac{1}{12\tau^2} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\cos \beta}{\sin^2 \beta} \sum_{\kappa=1}^6 \lambda_{\kappa}^2 e^{-\lambda_{\kappa} \tau \beta} d\beta.$$

Das Integral ist endlich, weil $\sum_{\kappa=1}^6 \lambda_{\kappa}^2 e^{-\lambda_{\kappa} \tau \beta}$ für $\beta = 0$ von der 4. Ordnung verschwindet. Es ergibt sich also

$$(13_1) \quad \sum_{\kappa=1}^6 \lambda_{\kappa} A_{\kappa}(\tau) = -\frac{\pi}{4\tau} - \frac{1}{12\tau^2} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\cos \beta}{\sin^2 \beta} \sum_{\kappa=1}^6 \lambda_{\kappa}^2 e^{-\lambda_{\kappa} \tau \beta} d\beta.$$

In gleicher Weise werden die durch zweimalige Differentiation aus (8) folgende Gleichung und die Gleichung (7) und ihre erste Ableitung behandelt. Für die Gleichung (7) und ihre Ableitungen brauchen wir dabei den aus (9b) und (12) folgenden Ausdruck für Ψ :

$$\Psi = - \sum_1^6 \lambda_{\kappa}^3 A_{\kappa}(\tau) e^{\lambda_{\kappa} \tau \alpha} - \frac{1}{12 \tau^2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \frac{\cos \beta}{\sin^2 \beta} \sum_1^6 \lambda_{\kappa}^4 e^{\lambda_{\kappa} \tau (\alpha - \beta)} d\beta.$$

Die zweite Ableitung der Gleichung (7) verlangt eine leichte Abänderung des Vorgehens. Sie lautet:

$$-\tau^2 \sum_1^6 \lambda_{\kappa}^5 A_{\kappa}(\tau) e^{\lambda_{\kappa} \tau \alpha} + \frac{1}{12} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \frac{\cos \beta}{\sin^2 \beta} \sum_1^6 e^{\lambda_{\kappa} \tau (\alpha - \beta)} d\beta - \tau^3 \int_0^{\alpha} \Phi(t, \delta) d\delta = -\frac{1}{2} \frac{1}{\sin \alpha}.$$

Um hierin $\alpha = 0$ setzen zu können, müssen wir zuvor das erste Integral der linken Seite umformen:

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \frac{\cos \beta}{\sin^2 \beta} \sum_1^6 e^{\lambda_{\kappa} \tau (\alpha - \beta)} d\beta &= 6 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \frac{\cos \beta}{\sin^2 \beta} d\beta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \frac{\cos \beta}{\sin^2 \beta} \sum_1^6 (e^{\lambda_{\kappa} \tau (\alpha - \beta)} - 1) d\beta \\ &= 6 - \frac{6}{\sin \alpha} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \frac{\cos \beta}{\sin^2 \beta} \sum_1^6 (e^{\lambda_{\kappa} \tau (\alpha - \beta)} - 1) d\beta. \end{aligned}$$

Das letzte Integral ist auch für $\alpha = 0$ endlich. Die Gleichung wird jetzt

$$-\tau^2 \sum_1^6 \lambda_{\kappa}^5 A_{\kappa}(\tau) e^{\lambda_{\kappa} \tau \alpha} + \frac{1}{2} + \frac{1}{12} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \frac{\cos \beta}{\sin^2 \beta} \sum_1^6 (e^{\lambda_{\kappa} \tau (\alpha - \beta)} - 1) d\beta - \tau^3 \int_0^{\alpha} \Phi(t, \delta) d\delta =$$

und nun läßt sich wieder $\alpha = 0$ setzen und eine Gleichung für die $A_{\kappa}(\tau)$ gewinnen.

Im ganzen wird folgendes lineare System für die $A_{\kappa}(\tau)$ erhalten:

$$(13A) \quad \begin{cases} \sum A_{\kappa} e^{\lambda_{\kappa} \tau \frac{\pi}{2}} = 0, \\ \sum A_{\kappa} \lambda_{\kappa}^2 e^{\lambda_{\kappa} \tau \frac{\pi}{2}} = 0, \\ \sum A_{\kappa} \lambda_{\kappa}^4 e^{\lambda_{\kappa} \tau \frac{\pi}{2}} = 0; \end{cases}$$

$$(13B) \left\{ \begin{array}{l} \Sigma A_{\kappa} \lambda_{\kappa} = F_1, \quad F_1 = -\frac{\pi}{4\tau} - \frac{1}{12\tau^2} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\cos \beta}{\sin^2 \beta} \sum_{l=1}^6 \lambda_l^3 e^{-\lambda_l \tau \beta} d\beta, \\ \Sigma A_{\kappa} \lambda_{\kappa}^3 = F_3, \quad F_3 = -\frac{1}{12\tau^2} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\cos \beta}{\sin^2 \beta} \sum_{l=1}^6 \lambda_l^4 e^{-\lambda_l \tau \beta} d\beta, \\ \Sigma A_{\kappa} \lambda_{\kappa}^5 = F_5, \quad F_5 = \frac{1}{2\tau^2} - \frac{1}{12\tau^2} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\cos \beta}{\sin^2 \beta} \sum_{l=1}^6 \lambda_l^6 (e^{-\lambda_l \tau \beta} - 1) d\beta. \end{array} \right.$$

Für die in F_1, F_3, F_5 auftretenden Integrale werden die Bezeichnungen J_1, J_3, J_5 gebraucht werden.

Um die Gleichungen zu lösen, multiplizieren wir das System (13A) mit i , und fassen unter Berücksichtigung der Beziehungen (10') die Glieder mit λ_{κ} und $\lambda_{3+\kappa}$ zusammen. Es kommt:

$$(14A) \quad \sum_{\kappa=1}^3 \lambda_{\kappa}^{2\nu+1} \left(A_{\kappa} e^{\lambda_{\kappa} \tau \frac{\pi}{2}} + A_{3+\kappa} e^{-\lambda_{\kappa} \tau \frac{\pi}{2}} \right) = 0 \quad (\nu = 0, 1, 2).$$

Die entsprechende Form für (13B) ist

$$(14B) \quad \sum_{\kappa=1}^3 \lambda_{\kappa}^{2\nu+1} (A_{\kappa} - A_{3+\kappa}) = F_{2\nu+1} \quad (\nu = 0, 1, 2).$$

Nun besteht zwischen je zweien der λ die Beziehung

$$(15) \quad \lambda_{\kappa}^4 + \lambda_{\kappa}^2 \lambda_l^2 + \lambda_l^4 = 0 \quad (\kappa, l = 1, 2, 3, \quad \kappa \neq l)$$

(weil $\frac{\lambda_{\kappa}^3}{\lambda_l^3}$ dritte Einheitswurzeln sind). Multipliziert man daher die Gleichungen (14A) der Reihe nach mit $\lambda_{\kappa}^4, \lambda_{\kappa}^2, 1$ und addiert und verfährt ebenso mit den Gleichungen (14B), so erhält man

$$(16A) \quad 3 \lambda_{\kappa}^5 \left(A_{\kappa} e^{\lambda_{\kappa} \tau \frac{\pi}{2}} + A_{3+\kappa} e^{-\lambda_{\kappa} \tau \frac{\pi}{2}} \right) = 0 \quad (\kappa = 1, 2, 3),$$

$$(16B) \quad 3 \lambda_{\kappa}^5 (A_{\kappa} - A_{3+\kappa}) = \lambda_{\kappa}^4 F_1 + \lambda_{\kappa}^3 F_3 + F_5 \quad (\kappa = 1, 2, 3)$$

und daraus ergibt sich übereinstimmend für alle $\kappa = 1, \dots, 6$:

$$A_{\kappa}(\tau) = -\frac{1}{3} \frac{e^{-\lambda_{\kappa} \tau \frac{\pi}{2}}}{e^{\lambda_{\kappa} \tau \frac{\pi}{2}} + e^{-\lambda_{\kappa} \tau \frac{\pi}{2}}} (\lambda_{\kappa}^5 F_1 + \lambda_{\kappa}^3 F_3 + \lambda_{\kappa} F_5) \\ = \frac{1}{3} \frac{e^{-\lambda_{\kappa} \tau \frac{\pi}{2}}}{e^{\lambda_{\kappa} \tau \frac{\pi}{2}} + e^{-\lambda_{\kappa} \tau \frac{\pi}{2}}} \left[\left(\frac{\pi}{4\tau} \lambda_{\kappa}^5 - \frac{\lambda_{\kappa}}{2\tau^2} \right) + \frac{1}{12\tau^2} (\lambda_{\kappa}^5 J_1 + \lambda_{\kappa}^3 J_3 + \lambda_{\kappa} J_5) \right] \quad (\kappa = 1, \dots, 6).$$

Die Integralsumme läßt sich unter Berücksichtigung der Beziehung (15) noch erheblich vereinfachen. Ziehen wir nämlich in den Summen unter den Integralen J_1, J_3, J_5 die Glieder mit λ_l und λ_{3+l} zusammen, so wird

$$\begin{aligned} & \lambda_{\kappa}^5 J_1 + \lambda_{\kappa}^3 J_3 + \lambda_{\kappa} J_5 \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\cos \beta}{\sin^2 \beta} \left[\sum_{l=1}^3 \lambda_{\kappa} \lambda_l^2 (\lambda_{\kappa}^4 + \lambda_{\kappa}^2 \lambda_l^2 + \lambda_l^4) (e^{\lambda_l \tau \beta} + e^{-\lambda_l \tau \beta}) - 6 \lambda_{\kappa}^7 \right] d\beta \\ &= 3 \lambda_{\kappa}^7 \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\cos \beta}{\sin^2 \beta} (e^{\lambda_{\kappa} \tau \beta} + e^{-\lambda_{\kappa} \tau \beta} - 2) d\beta. \end{aligned}$$

Somit erhält man endgültig für $A_{\kappa}(\tau)$ folgenden verhältnismäßig einfachen Ausdruck:

$$17) \quad A_{\kappa}(\tau) = \frac{e^{-\lambda_{\kappa} \tau \frac{\pi}{2}}}{e^{\lambda_{\kappa} \tau \frac{\pi}{2}} + e^{-\lambda_{\kappa} \tau \frac{\pi}{2}}} \left[\frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{4\tau} \lambda_{\kappa}^5 - \frac{\lambda_{\kappa}}{2\tau^2} \right) - \frac{\lambda_{\kappa}}{6\tau^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\cos \beta}{\sin^2 \beta} \left(\frac{e^{\lambda_{\kappa} \tau \beta} + e^{-\lambda_{\kappa} \tau \beta}}{2} - 1 \right) d\beta \right]$$

§ 4.

Asymptotische Auswertung eines Integrals.

Der Ausdruck (12) für Φ mit den Werten (17) der $A_{\kappa}(\tau)$ ist wegen der darin auftretenden verwickelten Integrale schwierig für alle Werte von t und α zu diskutieren. Er wird aber übersichtlich für große t . Was dabei unter „groß“ zu verstehen ist, wird sich im Laufe der Betrachtung zeigen. Die Grundlage dieser Betrachtung bildet die *asymptotische Auswertung des Integrals*

$$(18) \quad E(\tau, \alpha) = \int_{\alpha}^0 \frac{\cos \beta}{\sin^2 \beta} \left(\frac{e^{\lambda \tau \beta} + e^{-\lambda \tau \beta}}{2} - 1 \right) d\beta = \int_{\alpha}^0 \frac{\cos \beta}{\sin^2 \beta} (\cos \lambda \tau \beta - 1) d\beta, \\ \left(0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2} \right)^a,$$

worin λ eine komplexe Größe vom Betrage 1 ist: $\lambda = e^{i\varphi}$.

Die Variable τ bewege sich auf einem Strahl vom Winkel ϑ gegen die reelle Achse:

$$(19) \quad \tau = r e^{i\vartheta}.$$

Es sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1. $\lambda \tau$ hat einen von Null verschiedenen reellen Bestandteil, den wir

^{a)} Man beachte, daß der Wert $\alpha = 0$ ausgeschlossen ist.

als negativ voraussetzen wollen. Dies tritt ein, wenn es eine ganze Zahl k gibt, so daß

$$\frac{\pi}{2} < \varphi + \vartheta + 2k\pi < \frac{3\pi}{2}.$$

2. $\lambda\tau$ ist rein imaginär. Dies tritt ein, wenn

$$\varphi + \vartheta = k\pi + \frac{\pi}{2}.$$

Wir behandeln zuerst den Fall 1. Der reelle Bestandteil von $\lambda\tau$ sei $-\varrho r < 0$.

Das Integral $E(\alpha)$ wird zerlegt in $\int_{\frac{\alpha}{2}}^0 + \int_{\alpha}^{\frac{\alpha}{2}}$. Das erste dieser Integrale

läßt sich abschätzen. Dazu muß die störende Singularität des Ausdrucks $\frac{\cos \beta}{\sin^2 \beta}$ beseitigt werden, was durch zweimalige Produktintegration geschieht:

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\alpha}{2}}^0 \frac{\cos \beta}{\sin^2 \beta} (\operatorname{Cos} \lambda \tau \beta - 1) d\beta &= \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}} \left(\operatorname{Cos} \lambda \tau \frac{\alpha}{2} - 1 \right) + \lambda \tau \int_{\frac{\alpha}{2}}^0 \frac{1}{\sin \beta} \operatorname{Sin} \lambda \tau \beta d\beta \\ &= \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}} \left(\operatorname{Cos} \lambda \tau \frac{\alpha}{2} - 1 \right) + \lambda \tau \log \cot \frac{\alpha}{4} \operatorname{Sin} \lambda \tau \frac{\alpha}{2} \\ &\quad + \lambda^2 \tau^2 \int_{\frac{\alpha}{2}}^0 \log \cot \frac{\beta}{2} \operatorname{Cos} \lambda \tau \beta d\beta. \end{aligned}$$

Das letzte Integral ist kleiner als

$$e^{\varrho r \frac{\alpha}{2}} \left| \int_{\frac{\alpha}{2}}^0 \log \cot \frac{\beta}{2} d\beta \right| < m e^{\varrho r \frac{\alpha}{2}}.$$

In den übrigen Gliedern sind $\operatorname{Cos} \lambda \tau \frac{\alpha}{2}$ und $\operatorname{Sin} \lambda \tau \frac{\alpha}{2}$ ebenfalls $< e^{\varrho r \frac{\alpha}{2}}$. Ist daher $|\tau| = r$ so groß gewählt, daß r^2 ein hohes Vielfaches von $\frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}}$ ist, so läßt sich für das Integral die Abschätzung geben:

$$\left| \int_{\frac{\alpha}{2}}^0 \frac{\cos \beta}{\sin^2 \beta} (\operatorname{Cos} \lambda \tau \beta - 1) d\beta \right| < M r^2 e^{\varrho r \frac{\alpha}{2}}.$$

Andererseits wird das $\int_{\alpha}^{\frac{\alpha}{2}}$ durch Produktintegration in umgekehrtem Sinne behandelt:

$$\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \beta}{\sin^2 \beta} (\mathfrak{O} \lambda \tau \beta - 1) d\beta = -\frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \left(\frac{1}{\lambda \tau} \mathfrak{S} \sin \lambda \tau \alpha - \alpha \right) \\ + \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} \left(\frac{1}{\lambda \tau} \mathfrak{S} \sin \lambda \tau \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) + \int_{\alpha}^{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{2}{\sin^3 \beta} - \frac{1}{\sin \beta} \right) \left(\frac{1}{\lambda \tau} \mathfrak{S} \sin \lambda \tau \beta - \beta \right) d\beta.$$

Nochmalige Produktintegration verwandelt das letzte Integral in

$$\int_{\alpha}^{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{2}{\sin^3 \beta} - \frac{1}{\sin \beta} \right) \left(\frac{1}{\lambda \tau} \mathfrak{S} \sin \lambda \tau \beta - \beta \right) d\beta = -\left(\frac{2}{\sin^3 \alpha} - \frac{1}{\sin \alpha} \right) \left(\frac{1}{\lambda^3 \tau^3} \mathfrak{O} \lambda \tau \alpha - \frac{\alpha^2}{2} \right) \\ + \left(\frac{2}{\sin^3 \frac{\alpha}{2}} - \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}} \right) \left(\frac{1}{\lambda^3 \tau^3} \mathfrak{O} \lambda \tau \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha^2}{8} \right) \\ + \int_{\alpha}^{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{6 \cos \beta}{\sin^4 \beta} - \frac{\cos \beta}{\sin^2 \beta} \right) \left(\frac{1}{\lambda^2 \tau^2} \mathfrak{O} \lambda \tau \beta - \frac{\beta^2}{2} \right) d\beta.$$

Das letzte Integral ist

$$< \left(\frac{1}{r^3} e^{r\epsilon\alpha} + \frac{\alpha^3}{2} \right) \left(\frac{2}{\sin^3 \frac{\alpha}{2}} - \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}} \right).$$

Nun kann, wegen $\alpha > 0$, $|z| = r$ so groß gewählt werden, daß

$$(20') \quad \begin{cases} \text{a) das Produkt } r\alpha \text{ eine beliebige Schranke übersteigt,} \\ \text{b) dasselbe für } \frac{1}{r^3} e^{r\epsilon\frac{\alpha}{2}} \text{ der Fall ist.} \end{cases}$$

Dann ist die rechte Seite, mit einer von Landau herrührenden Bezeichnungsweise,

$$= \frac{\cos \alpha}{\sin^3 \alpha} \frac{1}{\lambda \tau} \frac{e^{-\lambda \tau \alpha}}{2} + O \left(e^{er\alpha} \left(\frac{1}{r^3 \alpha^3} + r^2 e^{-er\frac{\alpha}{2}} \right) \right)$$

Durch eine weitere Produktintegration und Abschätzung des Restintegrals stellt sich heraus, daß das einzige Glied von der Ordnung $\frac{1}{r^3} e^{er\alpha}$ der Ausdruck $-\left(\frac{2}{\sin^3 \alpha} - \frac{1}{\sin \alpha} \right) \frac{1}{\lambda^2 \tau^2} \frac{e^{-\lambda \tau \alpha}}{2}$ ist, alles übrige ist $O \left(\frac{1}{r^3} e^{er\alpha} \right)$ oder $O \left(r^2 e^{er\frac{\alpha}{2}} \right)$. Daher schreiben wir mit dem Zeichen $\sim$ für asymptotische Gleichheit:

$$(20) \quad E(\tau, \alpha) \sim \frac{1}{\lambda \tau} \frac{e^{-\lambda \tau \alpha}}{2} \left(\frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} - \frac{1}{\lambda \tau} \left(\frac{2}{\sin^3 \alpha} - \frac{1}{\sin \alpha} \right) \right), \\ 0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}, \quad \Re(\lambda \tau) = -er < 0.$$

Das Integral ist also im allgemeinen von der Ordnung $\frac{1}{r} e^{r\alpha}$, nur für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ erniedrigt sich die Ordnung:

$$(20_1) \quad E\left(\tau, \frac{\pi}{2}\right) \sim -\frac{1}{\lambda^2 \tau^2} \frac{e^{-\lambda \tau \alpha}}{2}.$$

Wir kommen jetzt zu dem Fall 2., rein imaginärem $\lambda \tau$. Hier greift eine wesentlich andere Abschätzung Platz. Es ist

$$\left| \frac{\lambda \tau}{i} \right| = r, \quad \frac{\lambda \tau}{i} = \pm r,$$

also

$$E(\tau, \alpha) = \int_{\alpha}^0 \frac{\cos \beta}{\sin^2 \beta} (\cos r \beta - 1) d\beta.$$

Das Integral wird zunächst durch Zusatzglieder so umgeformt, daß die Besonderheit des Nullpunkts unschädlich wird:

$$\begin{aligned} E(\tau, \alpha) &= \int_{\alpha}^0 \left(\frac{\cos \beta}{\sin^2 \beta} - \frac{1}{\beta^2} \right) (\cos r \beta - 1) d\beta + \int_{\alpha}^0 \frac{\cos r \beta - 1}{\beta^2} d\beta \\ &= \int_{\alpha}^0 \left(\frac{\cos \beta}{\sin^2 \beta} - \frac{1}{\beta^2} \right) (\cos r \beta - 1) d\beta + \int_{\alpha}^0 \frac{\cos r \beta - 1}{\beta^2} d\beta + \int_{\alpha}^{\infty} \frac{\cos r \beta - 1}{\beta^2} d\beta. \end{aligned}$$

Das zweite Integral ist bekannt:

$$\int_{\infty}^0 \frac{\cos r \beta - 1}{\beta^2} d\beta = -r \int_{\infty}^0 \frac{\sin r \beta}{\beta} d\beta = r \frac{\pi}{2}.$$

Die beiden anderen werden zusammengezogen zu

$$\int_{\alpha}^0 \left(\frac{\cos \beta}{\sin^2 \beta} - \frac{1}{\beta^2} \right) \cos r \beta d\beta + \int_{\alpha}^{\infty} \frac{1}{\beta^2} \cos r \beta d\beta - \frac{1}{\sin \alpha},$$

und jetzt läßt sich auf die Integrale, in denen $\cos r \beta$ mit einer im Integrationsintervall regulären Funktion multipliziert ist, Produktintegration anwenden. Dreimalige Wiederholung des Verfahrens führt zu

$$\begin{aligned} &\int_{\alpha}^0 \left(\frac{\cos \beta}{\sin^2 \beta} - \frac{1}{\beta^2} \right) \cos r \beta d\beta + \int_{\alpha}^{\infty} \frac{1}{\beta^2} \cos r \beta d\beta \\ &= -\frac{1}{r} \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \sin r \alpha - \frac{1}{r^2} \left(-\frac{2}{\sin^3 \alpha} + \frac{1}{\sin \alpha} \right) \cos r \alpha + \frac{1}{r^3} \frac{\cos \alpha}{\sin^3 \alpha} \left(\frac{6}{\sin^2 \alpha} - 1 \right) \sin r \alpha \\ &\quad + \frac{1}{r^3} \int_{\alpha}^0 \left(-\frac{24}{\sin^5 \beta} + \frac{20}{\sin^3 \beta} - \frac{1}{\sin \beta} + \frac{24}{\beta^5} \right) \sin r \beta d\beta - \frac{1}{r^3} \int_{\alpha}^{\infty} \frac{24}{\beta^5} \sin r \beta d\beta. \end{aligned}$$

Von den beiden Integralen der rechten Seite bleibt das erste unterhalb einer von r und α unabhängigen Grenze, das zweite ist $< \frac{6}{\alpha^4}$, die Integralsumme ist also $O\left(\frac{1}{\alpha^4 r^3}\right)$.

Unter der Bedingung a) für die Größe von r ist daher

$$(21) \quad E(\tau, \alpha) \sim \frac{r\pi}{2} - \frac{1}{\sin \alpha} - \frac{1}{r} \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \sin r\alpha + \frac{1}{r^2} \left(\frac{2}{\sin^3 \alpha} - \frac{1}{\sin \alpha} \right) \cos r\alpha \\ \left(0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2} \right).$$

Es verlohnt sich, an Stelle des r wieder die Variable τ einzuführen und die beiden Fälle $i\lambda\tau = \pm r$ einzeln anzuschreiben. Die Gleichungen lauten:

für positives $i\lambda\tau$

$$(21_+) \quad E(\tau, \alpha) \sim i\lambda\tau \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sin \alpha} - \frac{1}{i\lambda\tau} \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \sin r\alpha + \frac{1}{(i\lambda\tau)^2} \left(\frac{2}{\sin^3 \alpha} - \frac{1}{\sin \alpha} \right) \cos r\alpha$$

für negatives $i\lambda\tau$

$$(21_-) \quad E(\tau, \alpha) \sim -i\lambda\tau \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{i\lambda\tau} \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \sin r\alpha + \frac{1}{(i\lambda\tau)^2} \left(\frac{2}{\sin^3 \alpha} - \frac{1}{\sin \alpha} \right) \cos r\alpha$$

Man beachte besonders die Formeln für $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Die asymptotischen Reihen enthalten dann, beliebig weit fortgesetzt, keine Glieder mit $\sin r\alpha$, sondern, außer den Anfangsgliedern, nur $\cos r\alpha$.

Die Formeln (20) und (21) sind die Grundlage für die weitere Arbeit. Sie bedürfen aber noch einer Ergänzung. Drehen wir nämlich in der τ -Ebene einen Halbstrahl aus einem Gebiet, in dem $\Re(\lambda\tau) < 0$ ist, in eine Grenzlage, für die $\Re(\lambda\tau) = 0$, so ändert sich der asymptotische Wert sprunghaft. Dies liegt daran, daß die Werte τ , für welche (20) gilt, immer weiter und weiter wachsen, je näher der Halbstrahl der Grenzlage kommt: das drückt sich in der Bedingung b) aus. Die Näherung durch die Formel (20) ist also in der Nähe einer Grenzlage ungleichmäßig. Wir müssen deshalb noch eine Formel aufstellen, welche das Übergangsgebiet zwischen den Formeln (20) und (21) beherrscht, und die gleichmäßig gültig ist, d. h. unter alleiniger Voraussetzung der Bedingung a).

Dazu dient eine einfache Vorbemerkung, die an die Abschätzung für $\Re(\lambda\tau) < 0$,

$$E(\tau, \alpha) = \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \frac{1}{\lambda\tau} \frac{e^{-\lambda\tau\alpha}}{2} + O\left(e^{\tau\alpha} \left(\frac{1}{r^2 \alpha^3} + r^2 e^{-\tau \frac{\alpha}{2}} \right)\right),$$

⁹⁾ sogar $O\left(\frac{1}{\alpha^5 r^4}\right)$.

knüpft. Besteht nämlich zwischen ϱ und α eine solche Beziehung, daß

$$r^2 e^{-\varrho r \frac{\alpha}{2}} < \frac{1}{r^2}, \quad \varrho > \frac{8 \log r}{\alpha r},$$

wird die Ordnung des Restes einfacher

$$O\left(\frac{e^{\varrho r \alpha}}{r^2 \alpha^3}\right).$$

lange also ϱ der angegebenen Ungleichung genügt, gilt die asymptotische Formel (20), und auch die Restabschätzung in ihr bleibt ungeändert. Die Gültigkeit der Formel erlischt nur in dem Gebiete

$$\varrho < \frac{8 \log r}{\alpha r}.$$

h. zwischen der Grenzgeraden und einer Kurve, die sich mit der langsamen Steigung der logarithmischen Linie von ihr entfernt.

Die in diesem ausgeschlossenen Gebiete gültige Formel aber erhalten wir einfach durch Kombination der beiden Formeln (20) und (21):

$$(2) \quad E(\tau, \alpha) \sim \pm \lambda \tau \frac{\pi i}{2} - \frac{1}{\sin \alpha} - \frac{1}{\lambda \tau \sin^2 \alpha} \sin \lambda \tau \alpha.$$

Das Ergebnis ist anschaulich. Die Ableitung, die ich vollständig durchgeführt habe, will ich weglassen, weil sie eine schwierigere Integration erfordert. Für den Rest ergibt sich die Größenordnung

$$O\left(\frac{e^{\varrho r \alpha}}{\alpha^3 r^2} (\log r)^3\right).$$

§ 5.

Verhalten der Funktion $\Phi(t, \alpha)$ für große t .

Die Darstellung (12) der Funktion Φ hat für asymptotische Rechnung die große Unbequemlichkeit, daß sich die Glieder höchster Ordnung $\sum A_n e^{\lambda_n \tau \alpha}$ einerseits, in Φ_0 andererseits gerade gegeneinander wegheben. Wir haben daher zunächst die Aufgabe, für Φ eine andere Form zu finden, die diesen Mißstand nicht aufweist.

Da die Größen λ_n (10) paarweise entgegengesetzt gleich sind, haben für jedes τ höchstens drei Produkte $\lambda_n \tau$ einen *negativen reellen Bestandteil*. Weniger als drei solcher Produkte gibt es nur dann, wenn ein Produkt mit verschwindendem reellem Bestandteil auftritt. Dies ist dann der Fall, wenn τ von der Form

$$(23) \quad \tau = r e^{i \frac{\pi}{3}} \quad (l = 0, 1, \dots, 5)$$

t. Die Strahlen $\vartheta = l \frac{2\pi}{3}$ der τ -Ebene spielen eine Ausnahmepolle. In der t -Ebene werden sie alle auf die reelle Achse abgebildet.

Wir betrachten drei Größen λ , für die $\lambda_{\kappa}\tau$ nicht positiv ist. Im allgemeinen sind sie eindeutig bestimmt, im Ausnahmefall besteht eine Willkürlichkeit. Diese λ seien mit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ bezeichnet¹⁰⁾, in der Weise, daß

$$\begin{aligned} |\Re(\lambda_1 \tau)| &\geq |\Re(\lambda_2 \tau)| \geq |\Re(\lambda_3 \tau)|, \\ \text{ferner sei} \quad \lambda_4 &= -\lambda_1, \quad \lambda_5 = -\lambda_2, \quad \lambda_6 = -\lambda_3. \end{aligned}$$

Die Definition (18) des Integrals $E(\tau, \alpha)$ ergänzen wir dadurch, daß wir

$$(24) \quad E_{\kappa}(\tau, \alpha) = \int_a^0 \frac{\cos \beta}{\sin^2 \beta} (\cos \lambda_{\kappa} \tau \beta - 1) d\beta$$

setzen. Damit wird, nach (17),

$$(25) \quad A_{\kappa}(\tau) = \frac{e^{-\lambda_{\kappa}\tau \frac{\pi}{2}}}{e^{\lambda_{\kappa}\tau \frac{\pi}{2}} + e^{-\lambda_{\kappa}\tau \frac{\pi}{2}}} \left[\frac{1}{8} \left(\frac{\pi}{4\tau} \lambda_{\kappa}^5 - \frac{\lambda_{\kappa}}{2\tau^2} \right) - \frac{\lambda_{\kappa}}{6\tau^2} E_{\kappa} \left(\tau, \frac{\pi}{2} \right) \right].$$

In der in (12) auftretenden Summe $\sum_1^{\infty} A_{\kappa}(\tau) e^{\lambda_{\kappa}\tau \alpha}$ fassen wir die beiden Glieder mit den Indizes $\kappa (= 1, 2, 3)$ und $\kappa + 3$ zusammen und nennen den entstehenden Ausdruck vorübergehend B_{κ} :

$$(26) \quad \begin{aligned} B_{\kappa}(\tau) &= A_{\kappa}(\tau) e^{\lambda_{\kappa}\tau \alpha} + A_{\kappa+3}(\tau) e^{\lambda_{\kappa+3}\tau \alpha} \\ &= \frac{e^{-\lambda_{\kappa}\tau \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)} - e^{\lambda_{\kappa}\tau \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)}}{e^{-\lambda_{\kappa}\tau \frac{\pi}{2}} + e^{\lambda_{\kappa}\tau \frac{\pi}{2}}} \left[\frac{1}{8} \left(\frac{\pi}{4\tau} \lambda_{\kappa}^5 - \frac{\lambda_{\kappa}}{2\tau^2} \right) - \frac{\lambda_{\kappa}}{6\tau^2} E_{\kappa} \left(\tau, \frac{\pi}{2} \right) \right] \quad (\kappa = 1, 2, 3) \end{aligned}$$

Aus dem Bruch der rechten Seite wird das größte Glied herausgezogen:

$$\frac{e^{-\lambda_{\kappa}\tau \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)} - e^{\lambda_{\kappa}\tau \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)}}{e^{-\lambda_{\kappa}\tau \frac{\pi}{2}} + e^{\lambda_{\kappa}\tau \frac{\pi}{2}}} = e^{\lambda_{\kappa}\tau \alpha} - \frac{e^{\lambda_{\kappa}\tau \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)} + e^{\lambda_{\kappa}\tau \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right)}}{e^{-\lambda_{\kappa}\tau \frac{\pi}{2}} + e^{\lambda_{\kappa}\tau \frac{\pi}{2}}},$$

und $B_{\kappa}(\tau)$ folgendermaßen gespalten:

$$(27) \quad B_{\kappa}(\tau) = \left\{ \begin{aligned} & - \frac{e^{\lambda_{\kappa}\tau \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)} + e^{\lambda_{\kappa}\tau \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right)}}{e^{-\lambda_{\kappa}\tau \frac{\pi}{2}} + e^{\lambda_{\kappa}\tau \frac{\pi}{2}}} \left[\frac{1}{8} \left(\frac{\pi}{4\tau} \lambda_{\kappa}^5 - \frac{\lambda_{\kappa}}{2\tau^2} \right) - \frac{\lambda_{\kappa}}{6\tau^2} E_{\kappa} \left(\tau, \frac{\pi}{2} \right) \right] \\ & + e^{\lambda_{\kappa}\tau \alpha} \left[\frac{1}{8} \left(\frac{\pi}{4\tau} \lambda_{\kappa}^5 - \frac{\lambda_{\kappa}}{2\tau^2} \frac{1}{\sin^2 \alpha} \right) - \frac{\lambda_{\kappa}}{6\tau^2} E_{\kappa}(\tau, \alpha) \right] \\ & - e^{\lambda_{\kappa}\tau \alpha} \frac{\lambda_{\kappa}}{12\tau^2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \frac{\cos \beta}{\sin^2 \beta} (e^{-\lambda_{\kappa}\tau \beta} + e^{\lambda_{\kappa}\tau \beta}) d\beta. \end{aligned} \right.$$

¹⁰⁾ Änderung der Bezeichnung gegenüber (10)!

Führen wir diese Ausdrücke in die Formel (12) für Φ ein, so ergeben sich weitgehende Vereinfachungen dadurch, daß sich die letzten Integrale B_n gegen gleiche Glieder in Φ_0 wegheben. Und zwar fallen auf diese Weise gerade alle Exponentialfaktoren mit positivem reellem Bestandteil aus Φ_0 heraus. Das Ergebnis ist:

$$\Phi(\tau, \alpha) = \begin{cases} - \sum_1^3 \frac{e^{\lambda_n \tau \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} + e^{\lambda_n \tau \left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}}{e^{-\lambda_n \tau \frac{\pi}{2}} + e^{\lambda_n \tau \frac{\pi}{2}}} \left[\frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{4\tau} \lambda_n^5 - \frac{\lambda_n}{2\tau^2} \right) - \frac{\lambda_n}{6\tau^2} E_n \left(\tau, \frac{\pi}{2} \right) \right] \\ + \sum_1^3 e^{\lambda_n \tau \alpha} \left[\frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{4\tau} \lambda_n^5 - \frac{\lambda_n}{2 \sin \alpha \tau^2} \right) - \frac{\lambda_n}{6\tau^2} E_n(\tau, \alpha) \right] \\ - \frac{1}{12\tau^2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \frac{\cos \beta}{\sin^2 \beta} \sum_1^3 \lambda_n (e^{\lambda_n \tau (\beta - \alpha)} + e^{\lambda_n \tau (\beta + \alpha)}) d\beta. \end{cases}$$

Dies ist die neue Form der Funktion Φ , die wir suchten.

Wir wenden jetzt zuerst auf das Integral der letzten Zeile die gezielte Produktintegration an und erhalten:

$$\begin{aligned} \frac{\cos \beta}{\sin^2 \beta} \sum_1^3 \lambda_n (e^{\lambda_n \tau (\beta - \alpha)} + e^{\lambda_n \tau (\beta + \alpha)}) d\beta &= \frac{1}{\tau} \left[\frac{\cos \beta}{\sin^2 \beta} \sum_1^3 (e^{\lambda_n \tau (\beta - \alpha)} + e^{\lambda_n \tau (\beta + \alpha)}) \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \\ &+ \frac{1}{\tau} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \left(\frac{2}{\sin^3 \beta} - \frac{1}{\sin \beta} \right) \sum_1^3 (e^{\lambda_n \tau (\beta - \alpha)} + e^{\lambda_n \tau (\beta + \alpha)}) d\beta \\ &= \frac{1}{\tau} \frac{\cos \alpha}{\sin^3 \alpha} \left(3 + \sum_1^3 e^{2\lambda_n \tau \alpha} \right) + O\left(\frac{1}{\alpha^3 \tau^2}\right). \end{aligned}$$

Es eingesetzt, ergibt:

$$\Phi(\tau, \alpha) = \begin{cases} - \sum_1^3 \frac{e^{\lambda_n \tau \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} + e^{\lambda_n \tau \left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}}{e^{-\lambda_n \tau \frac{\pi}{2}} + e^{\lambda_n \tau \frac{\pi}{2}}} \left[\frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{4\tau} \lambda_n^5 - \frac{\lambda_n}{2\tau^2} \right) - \frac{\lambda_n}{6\tau^2} E_n \left(\tau, \frac{\pi}{2} \right) \right] \\ + \sum_1^3 e^{\lambda_n \tau \alpha} \left[\frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{4\tau} \lambda_n^5 - \frac{\lambda_n}{2 \sin \alpha \tau^2} \right) - \frac{\lambda_n}{6\tau^2} E_n(\tau, \alpha) \right] \\ - \frac{1}{12\tau^2} \frac{\cos \alpha}{\sin^3 \alpha} \left(3 + \sum_1^3 e^{2\lambda_n \tau \alpha} \right) + O\left(\frac{1}{\alpha^3 \tau^4}\right). \end{cases}$$

Es bleibt nur noch übrig, die asymptotischen Werte für die E_n einzuführen. Dies geschieht am geeignetsten in zwei Schritten.

Sei nämlich wie früher

$$\Re(\lambda_n \tau) = -\varrho_n \tau$$

gesetzt, so mögen *erstens* die drei Koeffizienten ϱ_n *oberhalb einer endlichen Grenze* s liegen. Dann lassen sich auf die E_n die Formeln (2) oder (20₁) anwenden, und demnach wird jeder Term der ersten Zeile von höchstens von der Ordnung

$$\frac{1}{r^4} e^{\varrho_n \tau \alpha} e^{-\varrho_n \tau (\pi - \alpha)}$$

und daher die erste Zeile

$$= O(r^{-4} e^{-s\tau(\pi - \alpha)}).$$

In der zweiten Zeile werden ebenso die Glieder

$$\sum_1^3 e^{\lambda_n \tau \alpha} \left[\frac{1}{8} \left(\frac{\pi}{4\tau} \lambda_n^5 - \frac{\lambda_n}{2 \sin \alpha \tau^2} \right) \right] = O(r^{-1} e^{-s\tau \alpha}),$$

und in der letzten Zeile wird

$$\sum_1^3 e^{2\lambda_n \tau \alpha} = O(e^{-2s\tau \alpha}).$$

Diese Größenordnungen können sämtlich vernachlässigt werden. Wir erhalten also

$$\Phi(\tau, \alpha) = - \sum_1^3 \frac{\lambda_n e^{\lambda_n \tau \alpha}}{6\tau^2} E_n(\tau, \alpha) - \frac{1}{4\tau^2} \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} + O\left(\frac{1}{\alpha^3 \tau^4}\right).$$

Der asymptotische Wert (20) macht das erste Glied zu $-\frac{1}{4\tau^2} \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha}$, und somit ergibt sich im ganzen:

$$(29') \quad \Phi(\tau, \alpha) = -\frac{1}{2\tau^2} \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} + O\left(\frac{1}{\alpha^3 \tau^4}\right) \sim -\frac{1}{2\tau^2} \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} = -\frac{1}{2t} \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha}.$$

Daß die Funktion $-\frac{1}{2t} \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha}$ ein asymptotisches Integral der Differentialgleichung (9) für Φ ist, läßt sich unmittelbar einsehen. Wir brauchen aber die ganzen vorstehenden Entwicklungen, um zu zeigen, daß die durch die Reihe (5) festgelegte Funktion Φ mit diesem partiellen Integral übereinstimmt.

Es möge jetzt *zweitens* τ in der Nähe eines Ausnahmestrahles liegen, so daß ein Koeffizient ϱ klein ist oder verschwindet. Dies ist nach unserer Bezeichnung der Koeffizient ϱ_3 . Es vereinfacht die Überlegung und beeinträchtigt nicht die Allgemeinheit, wenn wir von λ_3 annehmen, daß der Gleichung

$$\lambda_3^2 = +i$$

ügt. Dadurch wird nämlich nur eine Seite des Ausnahmestrahles ausgezeichnet, auf der $\lambda_3 \tau$ negativen reellen Bestandteil hat.

Jetzt sind zwei Fälle scharf zu scheiden, je nachdem $i\lambda_3 \tau$ positiv oder negativ ist.

I. Es sei $i\lambda_3 \tau > 0$ (positive reelle Achse, Halbstrahlen $\vartheta = \frac{2\pi}{3}$ und $\vartheta = \frac{4\pi}{3}$).

In der ersten Zeile der Gleichung (28') für Φ gilt bezüglich der Reihenordnungen der von λ_1 und λ_3 herrührenden Glieder das oben Gesagte. Sie können vernachlässigt werden. Für λ_3 aber benutzen wir die in der Formel des Ausnahmestrahles gültige Formel (22), von der wir für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ noch ein Glied mehr anschreiben wollen:

$$E\left(\tau, \frac{\pi}{2}\right) \sim \lambda \tau \frac{\pi i}{2} - 1 + \frac{1}{(i\lambda \tau)^2} \operatorname{Coj} \lambda \tau \frac{\pi}{2}.$$

damit wird

$$\frac{e^{\lambda_3 \tau \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} + e^{\lambda_3 \tau \left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}}{e^{-\lambda_3 \tau \frac{\pi}{2}} + e^{\lambda_3 \tau \frac{\pi}{2}}} \left[\frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{4\tau} \lambda_3^5 - \frac{\lambda_3}{2\tau^2} \right) - \frac{\lambda_3}{6\tau^2} E_3\left(\tau, \frac{\pi}{2}\right) \right]$$

$$\sim \frac{e^{\lambda_3 \tau \frac{\pi}{2}}}{6} \frac{\operatorname{Coj} \lambda_3 \tau \alpha}{\operatorname{Coj} \lambda_3 \tau \frac{\pi}{2}} \left[\left(\frac{\pi i}{2\tau} \lambda_3^2 - \frac{\lambda_3}{\tau^2} \right) - \left(\frac{\pi i}{2\tau} \lambda_3^2 - \frac{\lambda_3}{\tau^2} + \frac{1}{(i\lambda_3 \tau)^2} \frac{\lambda_3}{\tau^2} \operatorname{Coj} \lambda_3 \tau \frac{\pi}{2} \right) \right]$$

$$\sim \frac{e^{\lambda_3 \tau \frac{\pi}{2}}}{6} \frac{\operatorname{Coj} \lambda_3 \tau \alpha}{\lambda_3 \tau^4}.$$

das Glied, und damit die ganze erste Zeile von Φ , ist also von der

Ordnung $\frac{e^{-\lambda_3 \tau \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}}{\tau^4}$ und kann vernachlässigt werden.

In der zweiten Zeile von Φ setzen wir ebenfalls den Wert (22) für $E_3(\tau, \alpha)$ ein und kommen zu

$$e^{\lambda_3 \tau \alpha} \left[\frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{4\tau} \lambda_3^5 - \frac{\lambda_3}{2 \sin \alpha} \frac{1}{\tau^2} \right) - \frac{\lambda_3}{6\tau^2} E_3(\tau, \alpha) \right]$$

$$\sim \frac{e^{\lambda_3 \tau \alpha}}{6} \left[\left(\frac{\pi}{2\tau} i \lambda_3^2 - \frac{\lambda_3}{\sin \alpha} \frac{1}{\tau^2} \right) - \left(\frac{\pi}{2\tau} i \lambda_3^2 - \frac{\lambda_3}{\tau^2} \frac{1}{\sin \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \frac{1}{\tau^3} \operatorname{Sin} \lambda_3 \tau \alpha \right) \right]$$

$$\sim \frac{1}{12\tau^3} \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} (e^{2\lambda_3 \tau \alpha} - 1).$$

Die ganze zweite Zeile erhält damit den Wert

$$-\frac{1}{4\tau^3} \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{12\tau^3} \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} e^{2\lambda_3 \tau \alpha}.$$

Das letzte Zusatzglied aber hebt sich gerade gegen das von λ_3 herrührende Glied der dritten Zeile fort. Es kommt also auch hier das Resultat

$$(29) \quad \Phi(t, \alpha) = -\frac{1}{2\tau^3} \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} + O\left(\frac{1}{\alpha^3 \tau^4}\right) \\ \sim -\frac{1}{2t} \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha}.$$

Die Formel (29) stellt die Funktion Φ sonach gleichmäßig in der ganzen t -Ebene mit Ausnahme der Umgebung der negativen reellen Achse dar.

II. Es sei $i\lambda_3\tau < 0$ (negative reelle Achse, Halbstrahlen $\vartheta = \frac{5\pi}{3}$, $\vartheta = \frac{\pi}{3}$).

Der Unterschied gegen Fall I besteht nur darin, daß in $E(\tau, \alpha)$ der Koeffizient von τ entgegengesetztes Vorzeichen hat. Das hat aber zur Folge, daß in der Klammer

$$\left[\frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{4\tau} \lambda_3^5 - \frac{\lambda_3}{2\tau^2} \right) - \frac{\lambda_3}{6\tau^2} E_3 \left(\tau, \frac{\pi}{2} \right) \right]$$

die beiden Glieder mit $\frac{1}{\tau}$ sich nicht, wie vorhin, wegheben, sondern im Gegenteil addieren. Daher wird die erste Zeile:

$$-\frac{e^{\lambda_3\tau\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)} + e^{\lambda_3\tau\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}}{e^{-\frac{\pi}{2}\lambda_3\tau} + e^{\frac{\pi}{2}\lambda_3\tau}} \left[\frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{4\tau} \lambda_3^5 - \frac{\lambda_3}{2\tau^2} \right) - \frac{\lambda_3}{6\tau^2} E_3 \left(\tau, \frac{\pi}{2} \right) \right] \\ = -\frac{e^{\frac{\pi}{2}\lambda_3\tau} \operatorname{Cof} \frac{\lambda_3\tau\alpha}{2} \frac{\pi i}{\tau} \lambda_3^2}{6 \operatorname{Cof} \frac{\pi}{2} \lambda_3\tau} + O\left(\frac{e^{-\varrho r(\pi-\alpha)}}{r^4}\right).$$

Die entsprechende Änderung ist in der zweiten Zeile anzubringen. Daher kommt im ganzen die folgende Formel:

$$(30) \quad \Phi(t, \alpha) = -\frac{\pi}{6\tau} \frac{\operatorname{Sin} \lambda_3\tau \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)}{\operatorname{Cof} \frac{\pi}{2} \lambda_3\tau} - i\lambda_3^2 - \frac{1}{2\tau^3} \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} + O\left(\frac{1}{\alpha^3 \tau^4}\right) \\ \sim \frac{\pi}{6\lambda_3\tau} \frac{\operatorname{Sin} \lambda_3\tau \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)}{\operatorname{Cof} \frac{\pi}{2} \lambda_3\tau} - \frac{1}{2\tau^3} \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha}.$$

Hierzu ist eine erläuternde Bemerkung nützlich: Φ ist eine eindeutige Funktion von t . Dasselbe muß also von der rechten Seite von (30) gelten, die scheinbar von der dreiwertigen Wurzelgröße τ abhängt. Der Widerspruch klärt sich dadurch auf, daß τ nur in der Verbindung λ_3

tritt, die, gemäß der für jeden der drei Strahlen $\varphi = \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}$ verschiedenen Wahl des λ_3 , für die drei Strahlen den gleichen Wert hat.

Längs der drei Strahlen selbst ist in der Formel (30) das erste Glied überwiegend. Daher gilt in der t -Ebene längs der negativen reellen Achse:

$$\Phi(t, \alpha) \sim \frac{\pi}{6r} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) r}{\cos \frac{\pi}{2} r}, \quad r = |t|^{\frac{1}{2}} \quad \text{reell positiv.}$$

Diese Formel ist gültig für solche Werte t , die groß gegen $\frac{1}{\alpha^3}$ sind. Demselben Umfang wird in der Umgebung der negativen reellen Achse die Funktion Φ durch die zweigliedrige Formel (30) dargestellt. Diese ist einerseits auf der Achse in (31), andererseits mit Entfernung von der Achse in (29) über. Es ist also eine volle asymptotische Darstellung der Funktion $\Phi(t, \alpha)$ gewonnen.

Für $\alpha = 0$ versagen die Formeln.

Wir benutzen die asymptotische Darstellung, um Aufschluß über die Nullstellen der Funktion $\Phi(t, \alpha)$ als Funktion von t zu erhalten.

Den Fall $\alpha = 0$ behandeln wir gesondert. Er erledigt sich sehr einfach auf Grund der Reihenentwicklung (5). Es ist nämlich

$$\Phi(t, 0) = \sum_n \frac{1}{(2n+1)^3} \frac{1}{1 + \frac{t}{(2n+1)^3}}.$$

Für positive reelle t sind alle Glieder der Reihe positiv, auf der positiven reellen Achse liegen also sicher keine Nullstellen von $\Phi(t, 0)$. Ebenso wenig gibt es komplexe Nullstellen, denn, mit $t = t_1 + it_2$, wird der imaginäre Bestandteil von $\Phi(t, 0)$

$$\Im(\Phi(t, 0)) = -t_2 \sum \frac{1}{(2n+1)^3} \frac{1}{\left|1 + \frac{t}{(2n+1)^3}\right|^2}$$

und kann für $t_2 \neq 0$ als Summe von Gliedern gleichen Vorzeichens nicht verschwinden. Dagegen gibt es unendlich viele negative Nullstellen, von denen je eine in jedem Intervall $-(2n+1)^3, -(2n+3)^3$ liegt. In diesem Intervalle in der Nähe des Endes $-(2n+1)^3$ ist nämlich Φ sehr groß negativ, in der Nähe des anderen Endes ist es sehr groß positiv, und die Ableitung $\frac{d\Phi(t, 0)}{dt}$ ist für reelle t ständig negativ¹¹⁾.

¹¹⁾ Diese Ergebnisse folgen auch aus dem in § 2 Gesagten, wenn man zur Grenze der sehr breiten Membran, $\frac{b}{a} = \infty$, übergeht.

Für $\alpha \neq 0$ beschäftigen wir uns zunächst nur mit Nullstellen von genügend großem Betrag, d. h. solchen, für die $t\alpha^3$ groß ist. Dabei setzen wir außerdem $\alpha < \frac{\pi}{2}$ voraus, denn $\Phi\left(t, \frac{\pi}{2}\right)$ verschwindet identisch.

Die Formel (29) zeigt, daß Nullstellen nur auf oder in Nähe der negativen reellen Achse liegen können, denn überall sonst verhält sich $\Phi(t, \alpha)$ wie $\frac{\text{const.}}{t}$, und die Konstante ist, wegen $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$, von Null verschieden.

Formel (31) beweist die Existenz unendlich vieler reeller negativer Nullstellen, die in der Nähe der Verschwindungspunkte des $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, d. h. in der Nähe der Punkte

$$r = \frac{n\pi}{\frac{\pi}{2} - \alpha}, \quad t = -n^3 \left(\frac{\pi}{\frac{\pi}{2} - \alpha} \right)^3, \quad (n = \text{ganze Zahl})$$

gelegen sind. Ebenso zeigt die Formel das Vorhandensein von unendlich vielen einfachen Polen bei $r = 2n + 1$, $t = -(2n + 1)^3$. Da diese Pole wohl bekannt sind, haben wir eine Probe auf die Richtigkeit unserer Rechnung.

Um aber systematisch sämtliche genügend großen Nullstellen von $\Phi(t, \alpha)$ zu finden, müssen wir von der zweigliedrigen Formel (30) ausgehen. Setzen wir hierin $\lambda_3 \tau = r(i - \varrho)$, $\frac{3 \cos \alpha}{\pi \sin^2 \alpha} = B$, so läßt sich die Gleichung für die Nullstellen in der Form anschreiben:

$$(32) \quad r^2 \operatorname{Sin} r(i - \varrho) \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) - B \frac{i}{(i - \varrho)^2} \operatorname{Cos} r(i - \varrho) \frac{\pi}{2} = 0.$$

Wegen $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ ist B von Null verschieden.

Wir spalten in reellen und imaginären Teil und gewinnen das Gleichungssystem

$$(33) \quad \left\{ \begin{array}{l} -r^2 \operatorname{Sin} \varrho r \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \cos r \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) + B \frac{1 - \varrho^2}{(1 + \varrho^2)^2} \operatorname{Sin} \frac{\pi}{2} \varrho r \sin \frac{\pi}{2} r \\ \quad + \frac{2\varrho}{(1 + \varrho^2)^2} B \operatorname{Cos} \frac{\pi}{2} \varrho r \cos \frac{\pi}{2} r = 0, \\ r^2 \operatorname{Cos} \varrho r \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \sin r \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) + B \frac{1 - \varrho^2}{(1 + \varrho^2)^2} \operatorname{Cos} \frac{\pi}{2} \varrho r \cos \frac{\pi}{2} r \\ \quad - \frac{2\varrho}{(1 + \varrho^2)^2} B \operatorname{Sin} \frac{\pi}{2} \varrho r \sin \frac{\pi}{2} r = 0. \end{array} \right.$$

Hierin ist ϱ jedenfalls eine mit r abnehmende Größe, höchstens von der Ordnung $\frac{\log r}{r}$. Wir können daher das letzte Glied jeder Gleichung gegenüber dem vorletzten vernachlässigen und alle Größen ϱ^2 weglassen.

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $\sin \varrho r \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \sin r \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)$,
 die zweite mit $\cos \varrho r \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \cos r \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)$ und addieren, so kommt

$$\sin \frac{\pi}{2} - \alpha \cos r \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = -B \left\{ \sin \frac{\pi}{2} \varrho r \sin \varrho r \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \sin \frac{\pi}{2} r \sin r \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right. \\ \left. + \cos \frac{\pi}{2} \varrho r \cos \varrho r \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \cos \frac{\pi}{2} r \cos r \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right\} + (\varrho)$$

und daraus

$$r^2 \left| \sin r \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right| \left| \cos r \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right| < B(1 + (\varrho)) \cos \varrho r (\pi - \alpha).$$

Wir suchen zuerst solche Wurzeln, für welche die beiden Faktoren
 $\left| \sin r \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right|$ und $\left| \cos r \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right|$ oberhalb einer festen Grenze s bleiben.
 Dann ist für genügend großes r sicher

$$\cos \varrho r (\pi - \alpha) > \frac{s^2}{2B} r^2 (1 + (\varrho))$$

und demnach erst recht

$$e^{\varrho r (\pi - \alpha)} > \frac{s^2}{2B} r^2, \quad \varrho > \text{const.} \frac{\log r}{r}.$$

Bei diesem Werte von ϱ ist aber näherungsweise anzusetzen:

$$\sin \varrho r \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \cos \varrho r \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \frac{1}{2} e^{\varrho r \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)},$$

$$\sin \frac{\pi}{2} \varrho r = \cos \frac{\pi}{2} \varrho r = \frac{1}{2} e^{\varrho r \frac{\pi}{2}}.$$

Daher lauten die Gleichungen (33) in ihren Hauptgliedern

$$-r^2 e^{\varrho r \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)} \cos r \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) + B e^{\varrho r \frac{\pi}{2}} \sin \frac{\pi}{2} r = 0,$$

$$r^2 e^{\varrho r \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)} \sin r \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) + B e^{\varrho r \frac{\pi}{2}} \cos \frac{\pi}{2} r = 0,$$

und also muß r der Gleichung genügen

$$\cos r \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \cos \frac{\pi}{2} r + \sin r \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \sin \frac{\pi}{2} r = \cos r \alpha = 0.$$

Dann befriedigt aber

$$\varrho = \frac{1}{\alpha r} \log \frac{r^2}{B} \frac{\cos r \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)}{\sin r \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\alpha r} \log \frac{r^2}{B}$$

in beiden abgekürzten Gleichungen, und in der Nähe dieses Wertepaares
 , ϱ) liegt auch ein Wertepaar, das die vollen Gleichungen (33) erfüllt.

Unsere Funktion hat unendlich viele komplexe Wurzeln, die in der Nähe der Punkte

$$-r \pm \frac{i}{\alpha} \log \frac{r^2}{B}$$

liegen, wo

$$r = \frac{(2n+1)\pi}{2\alpha}, \quad n \text{ positiv ganz.}$$

Andere als diese komplexen und die schon früher gefundenen negativ-reellen Wurzeln gibt es aber nicht. Sie müßten nämlich in der Nähe solcher Werte r liegen, für die entweder $\cos r \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)$ oder $\sin r \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)$ verschwindet. Die erste Möglichkeit liefert überhaupt keine Wurzeln, wie folgendermaßen erschlossen werden kann: Es ist in diesem Falle nahezu $\left| \sin r \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right| = 1$. Daher folgt aus der zweiten Gleichung (33)

$$\cos \frac{\pi}{2} \varrho r > \frac{r^2}{B} \cos \varrho r \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right).$$

Dies zeigt aber, daß ϱ wieder von der Ordnung $\frac{\log r}{r}$ wird, und unsere oben gemachten Schlüsse führen wieder mit Notwendigkeit auf die Gleichung $\cos r \alpha = 0$, welche gleichzeitig mit $\cos r \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = 0$ erfüllt sein müßte.

Die zweite Möglichkeit, $\sin r \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = 0$, liefert die negativ-reellen Wurzeln. Daß sie keine anderen geben kann, zeigt eine ganz ähnliche Schlußweise wie die eben verwandte.

Von den Nullstellen der asymptotischen Näherung läßt sich unmittelbar auf diejenigen der Funktion $\Phi(t, \alpha)$ selbst schließen. Denn das Integral für die Nullstellenzahl, $\frac{1}{2\pi i} \int \frac{\Phi'}{\Phi} dt$, erstreckt über eine genügend weit entfernte Kurve in endlichem Abstand von den Nullstellen des asymptotischen Ausdrucks, wird asymptotisch durch das Integral über den asymptotischen Ausdruck angenähert.

Damit haben wir also das Endresultat: *Die Funktion $\Phi(t, \alpha)$ hat unendlich viele negativ-reelle und unendlich viele in der Nähe der negativ-reellen Achse liegende komplexe Wurzeln. Die ersten liegen in der Nähe der Abszissenwerte $\frac{n\pi}{2}$, die letzteren bei den Abszissenwerten $\frac{(2n+1)\pi}{2\alpha}$ ihre imaginären Bestandteile sind von der Ordnung $\log n$.*

Zu diesem Ergebnis können wir noch eine Ergänzung hinzufügen. Die Funktion $\Phi(t, \alpha)$ ist nämlich für $t=0$ gemäß (5) und Abschn. I (34a)

$$\Phi(0, \alpha) = \sum \frac{1}{(2n+1)^2} \cos(2n+1)\alpha = \frac{\pi}{4} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) > 0,$$

andererseits für sehr große positiv-reelle t nach (29) negativ. $\Phi(t, \alpha)$ hat also eine ungerade Anzahl positiv-reeller Nullstellen, also sicher mindestens eine.

Diese Tatsachen bestehen, wie schon mehrfach hervorgehoben, nur für $\alpha \neq 0$. Wir haben oben gesehen, daß für $\alpha = 0$ völlig andere Verhältnisse gelten. Indem α von Null aus wandert, rücken sofort von den negativ-reellen Wurzeln unendlich viele (aber bei kleinen α sehr weit auseinanderliegende) ins Komplexe, außerdem wird eine endliche, ungerade Anzahl positiv-reell¹²).

§ 6.

Die Eigenwerte des Randwertproblems.

Wir sind jetzt ganz nahe dem Ziel unserer Betrachtungen, der Ermittlung der Eigenwerte unseres Randwertproblems. Diese sind die Wurzeln der Gleichung

$$5) \quad \Delta(t) = 0$$

Abschn. I, Gleichung (20)), oder bei gleichen Trägheitsmomenten, $J_1 = J_2 = J$, der beiden Gleichungen

$$6) \quad \mathfrak{T}(t) = 0, \quad \mathfrak{C}(t) = 0$$

Abschn. I, Gleichungen (22a, b)). Die linken Seiten dieser Gleichungen lassen sich leicht zu der Funktion $\Phi(t, \alpha)$ in Beziehung setzen, so daß wir ihre Nullstellen, d. h. also für die Eigenwerte, im wesentlichen das Gleiche gilt wie für die ausführlich behandelten Nullstellen von Φ . Da der Fall $c = a$ (d. i. $\alpha = 0$) bereits in § 2 erledigt ist, wird jetzt immer $c < a < \frac{\pi}{2}$ vorausgesetzt.

Der Fall gleicher Trägheitsmomente ist wesentlich einfacher als der allgemeine Fall und soll deshalb vorweggenommen werden. Wir beschränken uns dabei auf die Gleichung

$$\mathfrak{T}(t) = 0.$$

¹² Die Verschiedenheit der Fälle $\alpha = 0$ und $\alpha \neq 0$, d. h. $c = a$ und $c < a$, hängt aufs engste mit der in § 2 besprochenen merkwürdigen Eigenschaft des Integrals (4')

$\int_0^a K(\xi, x) w(x) w(\xi) dx d\xi$ zusammen, für stetige normierte Funktionen w kein Minimum zu besitzen. Läge nämlich ein von Null verschiedenes Minimum vor, so könnten nicht für jedes $c < a$ positiv-reelle Wurzeln auftreten.

Nach Abschn. I, Gleichung (31a) ist

$$(37) \quad \mathfrak{I}(t) = \mathfrak{I}(t, \alpha, \gamma) = \sum_0^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \frac{1}{1 + \frac{t}{(2n+1)^3} \mathfrak{I}g(2n+1)\gamma} \cos(2n+1)\alpha$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \frac{a-c}{a}, \quad \gamma = \frac{\pi}{2} \frac{b}{a}.$$

Wir bilden

$$(38) \quad D(t, \alpha, \gamma) = \mathfrak{I}(t, \alpha, \gamma) - \Phi(t, \alpha)$$

$$= t \sum_0^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^6} \frac{1 - \mathfrak{I}g(2n+1)\gamma}{\left(1 + \frac{t}{(2n+1)^3} \mathfrak{I}g(2n+1)\gamma\right) \left(1 + \frac{t}{(2n+1)^3}\right)} \cos(2n+1)\alpha$$

und wollen beweisen, daß D in der ganzen Ebene von der Größenordnung $\frac{1}{t}$ ist.

Zu diesem Zweck zerlegen wir die Reihe D in zwei Teile. Es ist

$$1 - \mathfrak{I}g(2n+1)\gamma = \frac{2e^{-(2n+1)\gamma}}{e^{(2n+1)\gamma} + e^{-(2n+1)\gamma}} < 2 \cdot e^{-2(2n+1)\gamma}.$$

Zu jedem t läßt sich eine ganze Zahl n_0 so bestimmen, daß

$$(39) \quad (2n_0 - 1)^6 \leq |t| < (2n_0 + 1)^6,$$

und diese Zahl wird bei beliebigem γ , wenn nur $|t|$ groß genug ist, auch die Ungleichung

$$(40) \quad e^{(2n_0+1)\gamma} > (2n_0 + 1)^{18} > |t|^3$$

befriedigen. Wir setzen jetzt

$$(41) \quad D = t \left(\sum_0^{n_0-1} + \sum_{n_0}^{\infty} \right)$$

und schätzen zuerst die $\sum_{n_0}^{\infty}$ ab. Dazu werde vorausgesetzt, t sei so weit

von allen Nullstellen der Nenner entfernt, daß für alle n

$$\left| 1 + \frac{t}{(2n+1)^3} \mathfrak{I}g(2n+1)\gamma \right| > \frac{1}{|t|^{\frac{1}{2}}}, \quad \left| 1 + \frac{t}{(2n+1)^3} \right| > \frac{1}{|t|^{\frac{1}{2}}}.$$

Dadurch werden, wie leicht zu sehen, nur solche Werte t ausgeschlossen die im Innern von Kreisen mit Radius von der Ordnung $1/\sqrt{|t|}$ um die Stellen $-(2n+1)^3$, $-(2n+1)^3 \cot(2n+1)\gamma$ liegen. Diese ausgeschlossener Umgebungen lassen sich übrigens durch schärfere Annahmen über die Größe von t noch beliebig verkleinern.

Nach diesen Vorbereitungen läßt sich unmittelbar folgende Abschätzung machen:

$$\sum_{n_0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^6} \frac{1 - \operatorname{Irg}(2n+1)\gamma}{\left(1 + \frac{t}{(2n+1)^3} \operatorname{Irg}(2n+1)\gamma\right) \left(1 + \frac{t}{(2n+1)^3}\right)} \cos(2n+1)\alpha \Big|$$

$$< 2|t|^4 \sum_{n_0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^6} e^{-2(2n+1)\gamma} < 2|t|^4 \frac{1}{(2n_0+1)^6} e^{-2(2n_0+1)\gamma} \sum_0^{\infty} e^{-4k\gamma}$$

$$< \frac{2}{1-e^{-4\gamma}} \frac{1}{|t|^2} \frac{1}{(2n_0+1)^6} < \frac{2}{1-e^{-4\gamma}} \frac{1}{|t|^2} \frac{1}{|t|^{\frac{1}{2}}}.$$

Der Teil der Reihe D ist also von geringerer Ordnung als $\frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}$.

Zur Berechnung der ersten Teilsumme von D , der $\sum_0^{n_0-1}$, schreiben wir

$$\frac{1}{1 + \frac{t}{(2n+1)^3} \operatorname{Irg}(2n+1)\gamma} \left(1 + \frac{t}{(2n+1)^3}\right)$$

$$= \frac{(2n+1)^6}{t^3 \operatorname{Irg}(2n+1)\gamma} \left(1 - \frac{(2n+1)^3}{t} (1 + \operatorname{Cot}(2n+1)\gamma) + \dots\right)$$

$$= \frac{(2n+1)^6}{t^3 \operatorname{Irg}(2n+1)\gamma} \left(1 + \frac{(2n+1)^3}{t} R_n\right), \quad 0 \leq n \leq n_0 - 1.$$

Nach der ersten Ungleichung (39) ist $\frac{(2n+1)^3}{|t|} < \frac{1}{\sqrt{|t|}}$, und die Funktion R_n bleibt unterhalb einer von n_0 unabhängigen Grenze. Also wird

$$\sum_0^{n_0-1} \frac{1}{(2n+1)^6} \frac{1 - \operatorname{Irg}(2n+1)\gamma}{\left(1 + \frac{t}{(2n+1)^3} \operatorname{Irg}(2n+1)\gamma\right) \left(1 + \frac{t}{(2n+1)^3}\right)} \cos(2n+1)\alpha$$

$$= \frac{2}{t} \sum_0^{n_0-1} (2n+1) \frac{e^{-(2n+1)\gamma}}{e^{(2n+1)\gamma} - e^{-(2n+1)\gamma}} \cos(2n+1)\alpha$$

$$+ \frac{2}{t} \sum_0^{n_0-1} \frac{(2n+1)^3}{t} R_n \frac{(2n+1)e^{-(2n+1)\gamma}}{e^{(2n+1)\gamma} - e^{-(2n+1)\gamma}} \cos(2n+1)\alpha$$

$$= \frac{2}{t} \sum_0^{n_0-1} (2n+1) \frac{e^{-(2n+1)\gamma}}{e^{(2n+1)\gamma} - e^{-(2n+1)\gamma}} \cos(2n+1)\alpha + O\left(\frac{1}{|t|^{\frac{1}{2}}}\right)$$

$$= \frac{2}{t} \sum_0^{\infty} (2n+1) \frac{e^{-(2n+1)\gamma}}{e^{(2n+1)\gamma} - e^{-(2n+1)\gamma}} \cos(2n+1)\alpha + O\left(\frac{1}{|t|^{\frac{1}{2}}}\right).$$

Die in der letzten Zeile zugefügte Summe

$$\frac{2}{t} \sum_{n_0}^{\infty} (2n+1) \frac{e^{-(2n+1)\gamma}}{e^{(2n+1)\gamma} - e^{-(2n+1)\gamma}} \cos(2n+1)\alpha$$

infolge von (39) und (40) von der Ordnung $\frac{1}{t^{\frac{1}{2}-\frac{1}{6}}}$.

Also ist im ganzen

$$(42') \quad D(t, \alpha, \gamma) = \frac{2}{t} \sum_0^{\infty} (2n+1) \frac{e^{-(2n+1)\gamma}}{e^{(2n+1)\gamma} - e^{-(2n+1)\gamma}} \cos(2n+1)\alpha + O\left(\frac{1}{t}\right)$$

und

$$(42) \quad \mathfrak{I}(t, \alpha, \gamma) \sim \Phi(t, \alpha) + \frac{2}{t} \sum_n^{\infty} (2n+1) \frac{e^{-(2n+1)\gamma}}{e^{(2n+1)\gamma} - e^{-(2n+1)\gamma}} \cos(2n+1)\alpha \\ = \Phi(t, \alpha) + \frac{1}{t} d(\alpha, \gamma).$$

Diese asymptotische Formel gilt für alle t , deren Betrag einen durch α und γ festgelegten Wert übersteigt, und zwar gleichmäßig in jedem abgeschlossenen Gebiet, das keine der Unendlichkeitsstellen $-(2n+1)^3$ und $-(2n+1)^3 \cot(2n+1)\gamma$ enthält.

Lassen wir vorübergehend für γ auch komplexe Werte zu, so konvergiert die Reihe (42') gleichmäßig in der Halbebene $\Re(\gamma) \geq \gamma_0 > 0$ und stellt daher in dieser Halbebene eine reguläre Funktion von γ dar. Daher nimmt $d(\alpha, \gamma)$ bei festem α für positive $\gamma \geq \gamma_0$ jeden von Null verschiedenen Wert nur eine endliche Anzahl von Malen an.

Auf Grund dieser Bemerkung beweisen wir leicht die Tatsache:

Die Nullstellen von $\mathfrak{I}(t)$ sind asymptotisch ebenso verteilt wie die Nullstellen von $\Phi(t)$.

Nach (29) und (42) ist nämlich überall außer in der Nähe der negativen reellen Achse

$$(42a) \quad \mathfrak{I}(t, \alpha, \gamma) \sim \left(-\frac{1}{2} \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} + d(\alpha, \gamma) \right) \frac{1}{t}.$$

Ist also $d(\alpha, \gamma) \neq \frac{1}{2} \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha}$, so liegen in diesem Gebiete sicherlich keine Nullstellen von $\mathfrak{I}$. Die Gleichheit

$$d(\alpha, \gamma) = \frac{1}{2} \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha}$$

könnte aber nur für eine endliche Anzahl von Werten $\gamma \geq \gamma_0$ eintreten. Wir wollen uns der Kürze halber mit diesen Ausnahmewerten nicht aufhalten, besonders da sie wahrscheinlich überhaupt nicht existieren.

Auf der negativen reellen Achse, wo Φ von der Ordnung $\frac{1}{|z|} = \frac{1}{|t|}$ ist, gilt die Formel (31) auch für $\mathfrak{I}$, und zwar gleichmäßig außerhalb kleiner um die Pole beschriebener Intervalle. $\mathfrak{I}$ hat also asymptotisch die gleichen negativ-reellen Nullstellen wie Φ .

Für die Umgebung der negativen reellen Achse aber lassen sich die bei Φ angestellten Überlegungen (Gl. (32), (33), (34)) ungeändert auf $\mathfrak{I}$ übertragen, wenn man nur

$$B = \frac{3}{\pi} \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} - \frac{6}{\pi} d(\alpha, \gamma)$$

setzt.

Damit ist das in Aussicht gestellte Ergebnis über die Nullstellen von $\mathfrak{I}(t)$ bewiesen.

In gleicher Weise läßt sich die Funktion $\mathfrak{E}(t)$ behandeln. Für sie gewinnt man die asymptotische Formel:

$$\mathfrak{E}(t, \alpha, \gamma) = \Phi(t, \alpha) - \frac{2}{t} \sum_0^{\infty} (2n+1) \frac{e^{-(2n+1)\gamma}}{e^{(2n+1)\gamma} + e^{-(2n+1)\gamma}} \cos(2n+1)\alpha.$$

Nun ist noch der allgemeine Fall verschiedener Trägheitsmomente, J_2 übrig. Es handelt sich darum, die Nullstellen der Funktion $\Delta(t, \alpha, \gamma)$ mit den Nullstellen von $\Phi(t, \alpha)$ in Beziehung zu bringen. Ein großer Teil dieser Rechnung ist Wiederholung des bei $\mathfrak{I}(t)$ angewandten Verfahrens und wird daher übergangen.

Es ist

$$\Delta(t, \alpha, \gamma) = \left(1 - \sum_0^{\infty} \frac{\varphi'_n v_n}{d_n}\right) \left(1 - \sum_0^{\infty} \frac{\varphi''_n v_n}{d_n}\right) - \sum_0^{\infty} \frac{\varphi'_n v_n}{d_n} \sum_0^{\infty} \frac{\varphi''_n v_n}{d_n} = \frac{A' A'' - C' C''}{\left(\frac{\pi^2 c}{8 a}\right)^2};$$

$$= \frac{\pi^2 c}{8 a} \left(1 - \sum_0^{\infty} \frac{\varphi'_n v_n}{d_n}\right)$$

$$= \sum_0^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \frac{1 + p_1 \frac{t}{(2n+1)^3} \mathfrak{E} \cot 2(2n+1)\gamma}{1 + (p_1 + p_2) \frac{t}{(2n+1)^3} \mathfrak{E} \cot 2(2n+1)\gamma + \frac{t^2}{(2n+1)^6}} \cos(2n+1)\alpha,$$

$$= \frac{\pi^2 c}{8 a} \sum_0^{\infty} \frac{\varphi'_n v_n}{d_n}$$

$$= \frac{1}{\sin 2(2n+1)\gamma (2n+1)^5} \frac{1}{1 + (p_1 + p_2) \frac{t}{(2n+1)^3} \mathfrak{E} \cot 2(2n+1)\gamma + \frac{t^2}{(2n+1)^6}} \cos(2n+1)\alpha$$

$$p_1 p_2 = 1,$$

mit den entsprechenden Erklärungen für A'' , C'' .

Man unterwerfe n_0 und t denselben Ungleichungen (39), (40) wie oben und bemerke, daß die sämtlichen Nenner

$$\left| 1 + (p_1 + p_2) \frac{t}{(2n+1)^3} \mathfrak{E} \cot 2(2n+1)\gamma + \frac{t^2}{(2n+1)^6} \right| > \frac{1}{|t|^3}$$

sind, wenn t außerhalb von Kreisen mit Radius von der Ordnung $1/\sqrt{|t|}$ um die Nullstellen liegt.

Dann lassen sich zuerst die Größen C' , C'' asymptotisch darstellen,

indem man sie in $\sum_0^{n_0-1}$ und $\sum_{n_0}^{\infty}$ zerlegt. Es kommt:

$$C' = p_1 C, \quad C'' = p_2 C,$$

$$(47) \quad C \sim \frac{2}{t} \sum_0^{\infty} \frac{2n+1}{e^{2(2n+1)\gamma} - e^{-2(2n+1)\gamma}} \cos(2n+1)\alpha = \frac{c_0(\alpha, \gamma)}{t}.$$

Weiter wird gesetzt:

$$A' = \Phi(p_2 t, \alpha) + D'(t, \alpha, \gamma), \quad A'' = \Phi(p_1 t, \alpha) + D''(t, \alpha, \gamma).$$

Es ist

$$\Phi(p_2 t) = \sum_0^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \frac{1}{1 + p_2 \frac{t}{(2n+1)^2}} \cos(2n+1)\alpha.$$

Man erhält D' , indem man $\Phi(p_2 t)$ gliedweise von A' abzieht. Dazu braucht man die Formel

$$\begin{aligned} & \frac{1 + p_1 \frac{t}{(2n+1)^2} \cot 2(2n+1)\gamma}{1 + (p_1 + p_2) \frac{t}{(2n+1)^2} \cot 2(2n+1)\gamma + \frac{t^2}{(2n+1)^6}} - \frac{1}{1 + p_2 \frac{t}{(2n+1)^2}} \\ &= \frac{2e^{-2(2n+1)\gamma}}{e^{2(2n+1)\gamma} - e^{-2(2n+1)\gamma}} \frac{\frac{t}{(2n+1)^2} \left(-p_2 + \frac{t}{(2n+1)^2} \right)}{\left\{ 1 + (p_1 + p_2) \frac{t}{(2n+1)^2} \cot 2(2n+1)\gamma + \frac{t^2}{(2n+1)^6} \right\} \left\{ 1 + p_2 \frac{t}{(2n+1)^2} \right\}} \end{aligned}$$

Mit Hilfe der gewohnten Zerlegung der Reihe bei dem Index n_0 ergibt sich:

$$D' \sim p_1 D, \quad D'' \sim p_2 D,$$

$$(48) \quad D \sim \frac{2}{t} \sum_0^{\infty} (2n+1) \frac{e^{-2(2n+1)\gamma}}{e^{2(2n+1)\gamma} - e^{-2(2n+1)\gamma}} \cos(2n+1)\alpha = \frac{d_0(\alpha, \gamma)}{t}.$$

Die Funktionen $c_0(\alpha, \gamma)$ und $d_0(\alpha, \gamma)$ sind wieder bei festem α reguläre Funktionen von γ für $\Re(\gamma) \geq \gamma_0 > 0$.

Setzen wir in (44) ein, so kommt

$$(49) \quad \Delta(t, \alpha, \gamma) \sim \Phi(p_1 t, \alpha) \Phi(p_2 t, \alpha) + \frac{d_0(\alpha, \gamma)}{t} \{ p_1 \Phi(p_1 t, \alpha) + p_2 \Phi(p_2 t, \alpha) \} + \frac{1}{t^2} \{ (d_0(\alpha, \gamma))^2 - (c_0(\alpha, \gamma))^2 \}.$$

Aus dieser Darstellung erschließen wir das Ergebnis:

Die Nullstellen von $\Delta(t, \alpha, \gamma)$ sind asymptotisch so verteilt, wie diejenigen von $\Phi(p_1 t, \alpha)$ und $\Phi(p_2 t, \alpha)$.

Überall außer in der Nähe der negativen reellen Achse hat nämlich $\Phi(t, \alpha)$ den Wert (29), und wenn wir diesen einsetzen, ergibt sich nach einfacher Rechnung:

$$\begin{aligned}
 \Delta(t, \alpha, \gamma) &\sim \frac{1}{t^2} \left[\left\{ -\frac{1}{2} \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} + d_0 \right\}^2 - c_0^2 \right] \\
 &= \frac{1}{t^2} \left(-\frac{1}{2} \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} + d_0 + c_0 \right) \left(-\frac{1}{2} \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} + d_0 - c_0 \right) \\
 &= \frac{1}{t^2} \left(-\frac{1}{2} \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} + 2 \sum_0^{\infty} (2n+1) \frac{e^{-(2n+1)\gamma}}{e^{(2n+1)\gamma} - e^{-(2n+1)\gamma}} \cos(2n+1)\alpha \right) \\
 &\quad \cdot \left(-\frac{1}{2} \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} - 2 \sum_0^{\infty} (2n+1) \frac{e^{-(2n+1)\gamma}}{e^{(2n+1)\gamma} + e^{-(2n+1)\gamma}} \cos(2n+1)\alpha \right).
 \end{aligned}$$

Die beiden Faktoren von $\frac{1}{t^2}$ sind dieselben, die vorhin bei $\mathfrak{I}(t)$ und $\mathfrak{J}(t)$ aufgetreten sind. Wir setzen, wie dort, voraus, daß sie von Null verschieden sind, dann können Nullstellen nur in der Nähe der negativen reellen Achse liegen.

Auf der negativen reellen Achse selbst haben wir einfach

$$\Delta \sim \Phi(p_1 t) \Phi(p_2 t),$$

durch die Nullstellen gegeben sind. In der Umgebung der negativen reellen Achse aber, wo Φ durch die zweigliedrige Formel (30) darzustellen ist, wird zwar der Ausdruck von Δ verwickelter; daß aber unendlich viele komplexe Nullstellen dort liegen müssen, folgt ohne weiteres durch Stetigkeitsbetrachtung, indem man von dem Fall gleicher Trägheitsmomente ausgeht. Doch macht auch die rechnerische Durchführung nach Art des § 4 die Funktion Φ angewandten Verfahrens keine ernstliche Schwierigkeit.

Damit haben wir das abschließende Resultat:

Die Randwertaufgabe I—V hat unendlich viele Eigenwerte, die sich an der negativen reellen Achse häufen. Außerhalb eines von α und γ abhängigen Kreises um den Nullpunkt der t -Ebene liegen sie teils auf der negativen reellen Achse, teils im Komplexen in einem Kreisbogen, der durch zwei symmetrische logarithmische Linien um diesen Nullpunkt abgegrenzt wird. Im Innern des genannten Kreises liegen Eigenwerte nur in endlicher Zahl.

Zu dem letzten Punkt ist noch eine Bemerkung zu machen, wobei wir uns aber auf den Fall gleicher Trägheitsmomente beschränken und die Gleichung $\mathfrak{I}(t) = 0$ anknüpfen wollen. Für $\Phi(t)$ hatte sich die Existenz einer ungeraden Anzahl positiv-reeller Wurzeln daraus ergeben, daß $\Phi(t)$ am Nullpunkt positiv, für große positive t aber negativ ist. *Überträgt sich dieser Schluß auch auf $\mathfrak{I}(t)$?* Es handelt sich hier (§ 42a) um die Frage, ob

$$-\frac{1}{2} \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} + d(\alpha, \gamma) < 0$$

ist. Dies ist sicher der Fall für genügend große γ , denn bei festem α geht $d(\alpha, \gamma)$ mit wachsendem γ gegen Null. Um aber für *alle* γ positiv-reelle Eigenwerte nachzuweisen, bedarf es einer eingehenden Untersuchung der Funktion $d(\alpha, \gamma)$. Diese ist umständlich, scheint aber in der Tat zu dem Ergebnis zu führen, daß immer

$$d(\alpha, \gamma) < \frac{1}{2} \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha}$$

ist, daß also *immer positiv-reelle Eigenwerte vorhanden sind*. Die Schwierigkeit liegt bei kleinen Werten γ , d. h. bei langen, schmalen Membranen. Diese sind aber für die praktische Anwendung besonders wichtig.

Da diese über $\mathfrak{T}(t)$ gemachten Bemerkungen auch für $\mathfrak{G}(t)$ und schließlich für $\Delta(t)$ gelten, käme also das Resultat:

Die Randwertaufgabe hat eine endliche, gerade, von Null verschiedene Anzahl positiv-reeller Eigenwerte.

Berlin, 20. Oktober 1918.

(Eingegangen am 20. Oktober 1918.)

Singuläre Systeme linearer Volterrascher Integralgleichungen.

Von

J. Horn in Darmstadt.

Die Methode, die ich in den beiden Abhandlungen „Integration linearer Differentialgleichungen durch Laplacesche Integrale und Fakultätenreihen“ (Jahresber. d. D. Math.-Ver. 24 (1915), S. 309—329 und 25 (1916), S. 74—83) und „Verallgemeinerte Laplacesche Integrale als Lösungen linearer und nichtlinearer Differentialgleichungen“ (Jahresber. 25 (1916), S. 301—325) für ein System linearer Differentialgleichungen mit Unbestimmtheitsstelle angewandt habe, läßt sich nach geeigneter Umgestaltung auf ein singuläres System linearer Volterrascher Integralgleichungen übertragen.

Es seien die Funktionen $\varphi_\alpha(x)$ ($\alpha = 1, \dots, m$) aus den Integralgleichungen

$$\int_0^x \sum_{\beta=1}^m H_{\alpha\beta}(x, y) \varphi_\beta(y) dy = f_\alpha(x) \quad (\alpha = 1, \dots, m)$$

bestimmen. Die analytischen Funktionen $H_{\alpha\beta}(x, y)$ ($\alpha, \beta = 1, \dots, m$) seien an der Stelle $x = 0, y = 0$ regulär und die Determinante $|H_{\alpha\beta}(x, x)|$ ($\alpha, \beta = 1, \dots, m$) verschwinde für $x = 0$, ohne identisch zu verschwinden; die analytischen Funktionen $f_\alpha(x)$ ($\alpha = 1, \dots, m$) seien an der Stelle $x = 0$ regulär. Durch Differentiation der vorgelegten Integralgleichungen erhält man die Gleichungen

$$\sum_{\beta=1}^m H_{\alpha\beta}(x, x) \varphi_\beta(x) + \int_0^x \sum_{\beta=1}^m \frac{\partial H_{\alpha\beta}(x, y)}{\partial x} \varphi_\beta(y) dy = f'_\alpha(x) \quad (\alpha = 1, \dots, m),$$

wo wir die Form geben:

$$x^{k+1} \varphi_\alpha(x) + \int_0^x \sum_{\beta=1}^m K_{\alpha\beta}(x, y) \varphi_\beta(y) dy = g_\alpha(x) \quad (\alpha = 1, \dots, m);$$

wir verstehen unter k eine der Zahlen $0, 1, 2, \dots$ und setzen $K_{\alpha\beta}(x, y)$ in der Umgebung von $x = 0, y = 0$, $g_\alpha(x)$ in der Umgebung von $x = 0$ regulär voraus. Durch nochmalige Differentiation ergeben sich unter Anwendung der Bezeichnung

$$-P_{\alpha\beta}(x) = K_{\alpha\beta}(x, x) + \delta_{\alpha\beta}(k+1)x^k, \quad -Q_{\alpha\beta}(x, y) = \frac{\partial K_{\alpha\beta}(x, y)}{\partial x},$$

$$R_\alpha(x) = g'_\alpha(x)$$

die Integraldifferentialgleichungen

$$(A^*) \quad x^{k+1} \frac{d\varphi_\alpha(x)}{dx} = \sum_{\beta=1}^m P_{\alpha\beta}(x) \varphi_\beta(x) + \int_0^x \sum_{\beta=1}^m Q_{\alpha\beta}(x, y) \varphi_\beta(y) dy + R_\alpha(x) \quad (\alpha = 1, \dots, m).$$

Die Funktionen

$$P_{\alpha\beta}(x) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{\alpha\beta}^{(\lambda)} x^\lambda, \quad Q_{\alpha\beta}(x, y) = \sum_{\lambda, \mu=0}^{\infty} b_{\alpha\beta}^{(\lambda, \mu)} x^\lambda y^\mu,$$

$$R_\alpha(x) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} c_\alpha^{(\lambda)} x^\lambda$$

sind in der Umgebung von $x = 0$ bzw. $x = 0, y = 0$ regulär. Die Wurzeln $a_1, \dots, a_m$ der Gleichung $|a_{\alpha\beta}^{(0)} - s \delta_{\alpha\beta}| = 0$ ($\alpha, \beta = 1, \dots, m$) werden, soweit nichts anderes angegeben ist, voneinander und von Null verschieden vorausgesetzt. Durch eine lineare Transformation von $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ sei erreicht, daß $a_{\alpha\alpha}^{(0)} = a_\alpha$, $a_{\alpha\beta}^{(0)} = 0$ ($\alpha \geq \beta$) ist.

Aus den homogenen Integralgleichungen

$$\int_0^x \sum_{\beta=1}^m H_{\alpha\beta}(x, y) \varphi_\beta(y) dy = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, m)$$

gehen die homogenen Integraldifferentialgleichungen

$$(A) \quad x^{k+1} \frac{d\varphi_\alpha(x)}{dx} = \sum_{\beta=1}^m P_{\alpha\beta}(x) \varphi_\beta(x) + \int_0^x \sum_{\beta=1}^m Q_{\alpha\beta}(x, y) \varphi_\beta(y) dy \quad (\alpha = 1, \dots, m)$$

hervor, mit denen wir uns vorzugsweise beschäftigen. Wenn die Funktionen $Q_{\alpha\beta}(x, y)$ identisch verschwinden, haben wir das System linearer Differentialgleichungen

$$x^{k+1} \frac{d\varphi_\alpha(x)}{dx} = \sum_{\beta=1}^m P_{\alpha\beta}(x) \varphi_\beta(x) \quad (\alpha = 1, \dots, m),$$

welches unter der Voraussetzung $k > 0$ in den beiden oben angeführten Arbeiten mittels der Laplaceschen Transformation behandelt ist; es

$x=0$ als Unbestimmtheitsstelle vom Rang k , während dort $x=\infty$ singuläre Stelle war¹⁾.

Im zweiten Teil der Arbeit „Laplacesche Integrale als Lösungen Funktionalgleichungen“ (Journ. f. Math. 146 (1915), S. 95–115) ist Integralgleichung

$$\int_0^x H(x, y) \varphi(y) dy = f(x)$$

dem in der Umgebung von $x=0$, $y=0$ regulären Kern

$$H(x, y) = \sum_{\lambda, \mu=0}^{\infty} a_{\lambda, \mu} x^{\lambda} y^{\mu}$$

unter der Annahme, daß $a_{00}=0$, $a_{10}+a_{01}=0$, $a_{10} \neq 0$, $a_{20}+a_{11}+a_{02} \neq 0$ ²⁾ daß $f(x)$ in der Umgebung von $x=0$ regulär und $f(0)=0$, $f'(0)=0$ auf die Form

$$x^2 \frac{d\varphi(x)}{dx} + (1 - \alpha x) \varphi(x) = \int_0^x F(x, y) \varphi(y) dy + G(x)$$

gebracht worden, wo $F(x, y)$ und $G(x)$ in der Umgebung von $x=0$, $y=0$ bzw. $x=0$ regulär sind. Nachdem a. a. O. eine partikuläre Lösung dieser Gleichung als Laplacesches Integral dargestellt worden ist, bleibt noch die homogene Integralgleichung

$$\int_0^x H(x, y) \varphi(y) dy = 0$$

unter der daraus hergeleitete Gleichung

$$x^2 \frac{d\varphi(x)}{dx} + (1 - \alpha x) \varphi(x) = \int_0^x F(x, y) \varphi(y) dy$$

durch ein Laplacesches Integral zu lösen. Wir behandeln hier eine all-

¹⁾ Den Fall $k=0$, in welchem $x=0$ eine singuläre Stelle der Bestimmtheit des Differentialgleichungssystems ist, habe ich ohne einschränkende Voraussetzungen über die Wurzeln der Gleichung $|a_{\alpha\beta}^{(0)} - s \delta_{\alpha\beta}| = 0$ unter Benutzung der Elementarteiler der Determinante $|a_{\alpha\beta}^{(0)} - s \delta_{\alpha\beta}|$ in den Math. Ann. 39 (1891), S. 391 behandelt.

²⁾ Im ersten Teil der Abhandlung „Volterrasche Integralgleichungen und Differenzgleichungen“ (Journ. f. Math. 140 (1911), S. 120–158) ist die obige Integralgleichung unter der Annahme $a_{00}=0$, $a_{10}+a_{01}=0$, $a_{10} \neq 0$ mittels einer Methode einanderfolgender Näherungen behandelt. Den Fall $a_{\lambda\mu}=0$ ($\lambda+\mu < m$), $a_{m-1,1} + \dots + a_{0,m} \neq 0$, wo $m \geq 1$ ist, haben schon Volterra, Holmgren und Lalesco betrachtet (vgl. die Zitate im Journ. f. Math. 140 (1911), S. 120); ihm entspricht in der Theorie der linearen Differentialgleichungen die von L. Fuchs u. a. behandelte singuläre Stelle der Bestimmtheit.

gemeinere Aufgabe. Auf die Entwicklung der Laplaceschen Integrale in konvergente Fakultätenreihen gehen wir hier nicht ein.

Im I. Abschnitt betrachten wir das System homogener Gleichungen (A) für den Fall $k = 1$ (§§ 1–4); wir kommen im II. Abschnitt auf die oben erwähnten Untersuchungen über Systeme linearer Differentialgleichungen zurück, die wir in verschiedenen Richtungen abändern (§§ 5–6), um im III. Abschnitt ihre Ausdehnung auf das System homogener Gleichungen (A) für $k > 1$ vornehmen zu können (§§ 7–8). Sodann wird im IV. Abschnitt die noch erforderliche partikuläre Lösung eines Systems nicht homogener Gleichungen (A*) für beliebiges $k > 0$ ermittelt (§ 9). Im V. Abschnitt werden Systeme homogener und nicht homogener Gleichungen (A) und (A*) mit $k = 0$ kurz berührt (§ 10).

I. Homogene Gleichungen, $k = 1$.

§ 1.

Indem wir zunächst den Fall $k = 1$ behandeln, betrachten wir die Gleichungen

$$(A_1) \quad x^2 \frac{d\varphi_\alpha(x)}{dx} = \sum_{\beta=1}^m P_{\alpha\beta}(x) \varphi_\beta(x) + \int_0^x \sum_{\beta=1}^m Q_{\alpha\beta}(x, y) \varphi_\beta(y) dy \quad (\alpha = 1, \dots, m)$$

welche durch Reihen von der Form

$$\varphi_\alpha(x) = e^{-\frac{a}{x}} \sum_{n=0}^{\infty} A_{\alpha n} x^{r+n} \quad (\alpha = 1, \dots, m)$$

wo a eine der voneinander und von 0 verschiedenen Zahlen $a_1, \dots, a_m$ ist, formal befriedigt werden. Es sei z. B. $a = a_1$. Zur Berechnung der zugehörigen Reihen führen wir die Gleichungen (A₁) durch die Substitution

$$\varphi_\alpha(x) = e^{-\frac{a_1}{x}} \Phi_\alpha(x)$$

über in

$$x^2 \frac{d\Phi_\alpha(x)}{dx} = \sum_{\beta=1}^m (P_{\alpha\beta}(x) - a_1 \delta_{\alpha\beta}) \Phi_\beta(x) + \int_0^x \sum_{\beta=1}^m Q_{\alpha\beta}(x, y) e^{\frac{a_1}{x} - \frac{a_1}{y}} \Phi_\beta(y) dy$$

setzen $\Phi_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{\alpha n} x^{r+n}$ und vergleichen die Koeffizienten von x^{r+n} ($n = 0, 1, 2, \dots$). Wir stoßen hierbei auf Integrale

$$J_\mu = \int_0^x y^{r+\mu} e^{\frac{a_1}{x} - \frac{a_1}{y}} dy \quad (\mu = 0, 1, 2, \dots)$$

die konvergent sind, wenn der Integrationsweg den Nullpunkt innerhalb

Halbebene $\left| \arg y - \arg a_1 \right| < \frac{\pi}{2}$ verläßt; denn wenn y längs eines
Weges nach 0 geht, ist

$$\lim \left| e^{-\frac{a_1}{y}} \right| = \lim e^{-\frac{|a_1|}{|y|} \cos(\arg a_1 - \arg y)} = 0.$$

Durch partielle Integration erhält man die Rekursionsformel

$$J_\mu = \frac{1}{a_1} x^{r+\mu+2} - \frac{r+\mu+2}{a_1} J_{\mu+2},$$

bei wiederholter Anwendung zu der formalen Reihenentwicklung

$$J_\mu = \frac{1}{a_1} x^{r+\mu+2} - \frac{r+\mu+2}{a_1^2} x^{r+\mu+4} + \frac{(r+\mu+2)(r+\mu+4)}{a_1^3} x^{r+\mu+6} - \dots$$

in die wir an die Stelle des Integrals setzen. Durch Vergleichung der
Koeffizienten von $x^r, x^{r+1}, x^{r+2}, \dots$ erhält man die Gleichungen

$$A_{a0} = (a_\alpha - a_1) A_{a0},$$

$$A_{a1} = (a_\alpha - a_1) A_{a1} + \sum_\beta a_{\alpha\beta}^{(1)} A_{\beta 0},$$

$$A_{a2} = (a_\alpha - a_1) A_{a2} + \sum_\beta a_{\alpha\beta}^{(1)} A_{\beta 1} + \sum_\beta a_{\alpha\beta}^{(2)} A_{\beta 0} + \frac{1}{a_1} \sum_\beta b_{\alpha\beta}^{(0,0)} A_{\beta 0},$$

.....

Da $a_2, \dots, a_m$ von a_1 verschieden sind, ergibt das erste Gleichungssystem
 $A_{a0} = 0$ ($\alpha = 2, \dots, m$), während A_{10} beliebig ist; das zweite System
ergibt

$$r = a_{11}^{(1)}, \quad A_{a1} = -\frac{a_{a1}^{(1)}}{a_\alpha - a_1} A_{10} \quad (\alpha = 2, \dots, m);$$

Aus der ersten Gleichung des dritten Systems folgt

$$A_{11} = \sum_{\beta=2}^m a_{1\beta}^{(1)} A_{\beta 1} + a_{11}^{(2)} A_{10} + \frac{1}{a_1} b_{11}^{(0,0)} A_{10},$$

Während man aus den übrigen Gleichungen dieses Systems A_{a2} ($\alpha = 2, \dots, m$)
berechnet. Man berechnet $A_{1,j-1}$ aus der ersten Gleichung des $(j+1)$ -ten
Systems, d. h. durch Vergleichung der Koeffizienten von x^{r+j} , $A_{a,j-1}$
($\alpha = 2, \dots, m$) aus der α -ten Gleichung des j -ten Systems, also durch
Vergleichung der Koeffizienten von x^{r+j-1} . Wenn man also in den
Gleichungen für $\Phi_1, \dots, \Phi_m$ die Funktion Φ_α ($\alpha = 1, \dots, m$) durch
 $A_{a0} x^r + A_{a1} x^{r+1} + \dots + A_{a,j-1} x^{r+j-1}$ ersetzt, bleiben in der ersten
dieser Gleichungen nur die Potenzen $x^{r+j+1}, x^{r+j+2}, \dots$ stehen, in den
übrigen Gleichungen außerdem x^{r+j} .

Wir nehmen die ganze positive Zahl j so groß an, daß $\bar{r} + j > 0$ ist,
wobei $\bar{r}$ der reelle Teil von r ist, und setzen, wenn $j > 0$ ist,

$$\varphi_\alpha(x) = e^{-\frac{a_1}{x}} (A_{\alpha 0} x^r + A_{\alpha 1} x^{r+1} + \dots + A_{\alpha, j-1} x^{r+j-1} + \psi_\alpha(x))$$

(\(\alpha = 1, \dots, m\))

Durch die Substitution $\Phi_\alpha(x) = \sum_{p=0}^{j-1} A_{\alpha p} x^{r+p} + \psi_\alpha(x)$ gehen die Gleichungen für die $\Phi_\alpha(x)$ über in

$$x^2 \frac{d\psi_\alpha(x)}{dx} = \sum_{\beta=1}^m (P_{\alpha\beta}(x) - a_1 \delta_{\alpha\beta}) \psi_\beta(x) + \int_0^x \sum_{\beta=1}^m Q_{\alpha\beta}(x, y) e^{\frac{a_1}{x} - \frac{a_1}{y}} \psi_\beta(y) dy + \Omega_\alpha$$

$$\Omega'_\alpha = \sum_{\beta=1}^m (P_{\alpha\beta}(x) - a_1 \delta_{\alpha\beta}) \sum_{p=0}^{j-1} A_{\beta p} x^{r+p} - \sum_{p=0}^{j-1} (r+p) A_{\alpha p} x^{r+p+1},$$

$$\Omega''_\alpha = \int_0^x \sum_{\beta=1}^m Q_{\alpha\beta}(x, y) e^{\frac{a_1}{x} - \frac{a_1}{y}} \sum_{p=0}^{j-1} A_{\beta p} y^{r+p} dy = \sum_{\beta=1}^m \sum_{\lambda=0}^\infty \sum_{\mu=0}^\infty \sum_{p=0}^{j-1} b_{\alpha\beta}^{(\lambda, \mu)} A_{\beta p} x^{r+p+\lambda+\mu}$$

Vermittels der für $\mu < j-1$ gültigen Formel

$$J_{\mu} = \frac{1}{a_1} x^{r+\mu+2} - \frac{r+\mu+2}{a_1^2} x^{r+\mu+3} + \dots + (-1)^{j-\mu-2} \frac{(r+\mu+2) \dots (r+j-1)}{a_1^{j-\mu-1}} J_{j-1}$$

$$+ (-1)^{j-\mu-1} \frac{(r+\mu+2) \dots (r+j)}{a_1^{j-\mu-1}} J_j$$

drücken wir $J_{\mu+p}$ ($\mu+p < j-1$) durch $x^{r+p+\mu+2}, \dots, x^{r+j}, J_{j-1}$ aus. Dann erscheint Ω''_α als Summe von Gliedern Konst. $x^{r+\iota+2}$ ($\iota=0, 1, 2, \dots$) und Konst. $x^\lambda J_{j+\kappa-1}$ ($\kappa, \lambda=0, 1, 2, \dots$). (Da die formale Reihenentwicklung von J_{j-1} mit x^{r+j+1} beginnt, werden die Glieder mit $x^{r+2}, \dots, x^{r+j}$ nicht geändert, wenn man J_{j-1} durch J_j , dann J_j durch J_{j+1} usw. ersetzt.) Oder anders ausgedrückt, Ω''_α besteht aus

$$\int_0^x S_\alpha(x, y) e^{\frac{a_1}{x} - \frac{a_1}{y}} dy,$$

wo

$$S_\alpha(x, y) = \sum_{\lambda, \mu=0}^\infty d_\alpha^{(\lambda, \mu)} x^\lambda y^{r+j+\mu-1}$$

in der Umgebung von $x=0, y=0$ konvergent ist, und aus einer mit x^{r+2} multiplizierten Potenzreihe von x . Man hat demnach

$$\Omega'_\alpha + \Omega''_\alpha = R_\alpha(x) + \int_0^x S_\alpha(x, y) e^{\frac{a_1}{x} - \frac{a_1}{y}} dy$$

unter Einführung der in der Umgebung von $x=0$ konvergenten Reihe

$$R_\alpha(x) = \sum_{\lambda=0}^\infty c_\alpha^{(\lambda)} x^{r+j+\lambda}, \quad c_1^{(0)} = 0;$$

die Glieder mit $x^r, x^{r+1}, \dots, x^{r+j-1}$ und für $\alpha = 1$ das Glied mit x^{r+j} erhalten auf Grund der Berechnung von $r, A_{\alpha 0}, \dots, A_{\alpha, j-1}$ fort. Es gelten also die Gleichungen

$$x^2 \frac{d\psi_\alpha(x)}{dx} = \sum_{\beta=1}^m (P_{\alpha\beta}(x) - a_1 \delta_{\alpha\beta}) \psi_\beta(x) + \int_0^x \sum_{\beta=1}^m Q_{\alpha\beta}(x, y) e^{\frac{a_1}{x} - \frac{a_1}{y}} \psi_\beta(y) dy \\ + R_\alpha(x) + \int_0^x S_\alpha(x, y) e^{\frac{a_1}{x} - \frac{a_1}{y}} dy \quad (\alpha = 1, \dots, m)$$

Wir führen die für alle t konvergenten Reihen ein:

$$F_{\alpha\beta}(t) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} a_{\alpha\beta}^{(\lambda)} \frac{t^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!}, \quad G_{\alpha\beta}^{(\lambda)}(t) = \sum_{\mu=0}^{\infty} b_{\alpha\beta}^{(\lambda, \mu)} \frac{t^{\mu+1}}{(\mu+1)!}, \\ M_\alpha(t) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} c_\alpha^{(\lambda)} \frac{t^{r+j+\lambda-1}}{\Gamma(r+j+\lambda)}, \quad N_\alpha^{(\lambda)}(t) = \sum_{\mu=0}^{\infty} d_{\alpha}^{(\lambda, \mu)} \frac{t^{r+j+\mu}}{\Gamma(r+j+\mu+1)}.$$

Die Laplacesche Transformation

$$\psi_\alpha(x) = \int_0^\infty w_\alpha(t) e^{-\frac{t}{x}} dt \quad (\alpha = 1, \dots, m)$$

erhält, wenn man zunächst formal rechnet³⁾, auf das System linearer Integralgleichungen

$$(t - a_\alpha + a_1) w_\alpha(t) = \sum_{\beta=1}^m \int_0^t F_{\alpha\beta}(t-\tau) w_\beta(\tau) d\tau + \sum_{\beta=1}^m \int_0^t \frac{G_{\alpha\beta}^{(0)}(t-\tau)}{t+a_1} w_\beta(\tau) d\tau \\ + \sum_{\beta=1}^m \int_0^t \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{(t-\tau)^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!} \frac{1}{t+a_1} dt \int_0^t G_{\alpha\beta}^{(\lambda)}(t-\tau) w_\beta(\tau) d\tau + M_\alpha(t) + \frac{N_\alpha^{(0)}(t)}{t+a_1} \\ + \int_0^t \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{(t-\tau)^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!} \frac{N_\alpha^{(\lambda)}(\tau)}{\tau+a_1} d\tau \quad (\alpha = 1, \dots, m).$$

Durch Vertauschung der Integrationen nach τ und t erhält man

$$\int_0^t \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{(t-\tau)^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!} \frac{1}{t+a_1} \int_0^t G_{\alpha\beta}^{(\lambda)}(t-\tau) w_\beta(\tau) d\tau \\ = \int_0^t w_\beta(\tau) d\tau \int_\tau^t \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{(t-\tau)^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!} \frac{1}{t+a_1} G_{\alpha\beta}^{(\lambda)}(t-\tau) dt.$$

³⁾ Vgl. den Übergang von (C_1) zu (B_1) in § 4.

Die Integralgleichungen (C_1) schreiben sich demnach:

$$(D_1) \quad (t - a_\alpha + a_1) w_\alpha(t) \\ = \sum_{\beta=1}^m \int_0^t \left\{ F_{\alpha\beta}(t-\tau) + \frac{G_{\alpha\beta}^{(0)}(t-\tau)}{t+a_1} + \int_{\tau}^t \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{(t-\tau)^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!} \frac{1}{t+a_1} G_{\alpha\beta}^{(\lambda)}(t-\tau) d\tau \right\} w_\beta(\tau) \\ + M_\alpha(t) + \frac{N_\alpha^{(0)}(t)}{t+a_1} + \int_0^t \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{(t-\tau)^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!} \frac{N_\alpha^{(\lambda)}(\tau)}{\tau+a_1} d\tau \quad (\alpha = 1, \dots, m)$$

Wenn wir diese Gleichungen in der Form

$$(e) \quad \begin{cases} t w_1(t) = \sum_{\beta=1}^m \int_0^t f_{1\beta}(t, \tau) w_\beta(\tau) d\tau + f_1(t), \\ w_\alpha(t) = \sum_{\beta=1}^m \int_0^t f_{\alpha\beta}(t, \tau) w_\beta(\tau) d\tau + f_\alpha(t) \quad (\alpha = 2, \dots, m) \end{cases}$$

schreiben, sind die Funktionen $f_{\alpha\beta}(t, \tau)$ ($\alpha, \beta = 1, \dots, m$) regulär, wenn man von den Punkten $-a_1, a_2 - a_1, \dots, a_m - a_1$ absieht; es ist

$$f_{11}(0, 0) = F_{11}(0, 0) = a_{11}^{(0)} = r.$$

Wenn man

$$f_\alpha(t) = t^{r+j-1} h_\alpha(t) \quad (\alpha = 1, \dots, m)$$

setzt, sind auch die Funktionen $h_\alpha(t)$ abgesehen von $-a_1, a_2 - a_1, \dots, a_m - a_1$ im Endlichen regulär; es ist $h_1(0) = 0$.

Im Falle $j = 0$ setzen wir

$$\varphi_\alpha(x) = e^{-\frac{a_1}{x}} \psi_\alpha(x) \quad (\alpha = 1, \dots, m)$$

die Funktionen $R_\alpha(x)$, $S_\alpha(x, y)$, $M_\alpha(t)$, $N_\alpha^{(\lambda)}(t)$, $f_\alpha(t)$ ($\alpha = 1, \dots, m$) verschwinden jetzt identisch

§ 2.

Wir betrachten das System linearer Integralgleichungen (e). Der einfach zusammenhängende abgeschlossene Bereich $\Re$ enthalte den Punkt $t = 0$; jeder Punkt t von $\Re$ könne mit $t = 0$ durch einen in $\Re$ verlaufenden Weg verbunden werden, dessen Länge $\int_{\Gamma} |d\tau| = T$ unter einer endlichen Schranke liegt. Die Funktionen $f_{\alpha\beta}(t, \tau)$ ($\alpha, \beta = 1, \dots, m$) und $t^{-s+j+1} f_\alpha(t)$ ($\alpha = 1, \dots, m$), wo s statt $r + j$ geschrieben ist, seien regulär, wenn t und τ dem Bereich $\Re$ angehören. Der die Punkte 0 und t verbindende Integrationsweg kann irgendwie in $\Re$ verlaufen; er wird nötigenfalls durch einen äquivalente Weg l ersetzt, dessen Länge kleiner als l ist. Wir knüpfen an Jahresbe-

D. Math.-Ver. 24 (1915), S. 213–216 an und benutzen die dortigen Bezeichnungen. Es ist stets $\bar{t} T \leq |t| \leq T$, wo $0 < \bar{t} \leq 1$ ist, und

$$|t^{r-1}| \leq \kappa T^{\bar{r}-1}, \quad |t^{-r}| \leq \kappa' T^{-\bar{r}},$$

κ und κ' endliche positive Konstante sind⁴⁾.

Durch Auflösung der $m-1$ letzten Gleichungen (e) nach $w_2(t), \dots, w_m(t)$ erhält man

$$w_\alpha(t) = \int_0^t F_\alpha(t, \tau) w_1(\tau) d\tau + E_\alpha(t) \quad (\alpha = 2, \dots, m);$$

wo E_α ist für $\alpha = 2, \dots, m$

$$E_\alpha(t) = f_\alpha(t) + \sum_{\beta=2}^m \int_0^t S_{\alpha\beta}(t, z) f_\beta(z) dz,$$

$$F_\alpha(t, \tau) = f_{\alpha 1}(t, \tau) + \sum_{\beta=2}^m \int_\tau^t S_{\alpha\beta}(t, z) f_{\beta 1}(z) dz.$$

Nach Einsetzung in die erste Gleichung (e) ergibt sich

$$t w_1(t) = \int_0^t F(t, \tau) w_1(\tau) d\tau + E(t);$$

wo E ist

$$E(t) = f_1(t) + \sum_{\beta=2}^m \int_0^t f_{1\beta}(t, t) E_\beta(t) dt,$$

$$F(t, \tau) = f_{11}(t, \tau) + \sum_{\beta=2}^m \int_\tau^t f_{1\beta}(t, t) F_\beta(t, \tau) dt.$$

Funktionen $t^{-s+1} E_\alpha(t)$ ($\alpha = 2, \dots, m$) und $t^{-s} E(t)$ sind in $\Re$ regulär. Sämtliche hier auftretenden Funktionen von t und τ sind regulär, wenn t und τ in $\Re$ liegen.

Die Integralgleichung für $w_1(t)$ geht durch Differentiation über in

$$t \frac{dw_1(t)}{dt} = (F(t, t) - 1) w_1(t) + \int_0^t \frac{\partial F(t, \tau)}{\partial t} w_1(\tau) d\tau + \frac{dE(t)}{dt}.$$

Wir setzen

$$F(0, 0) = f_{11}(0, 0) = r, \quad F(t, t) = r + t\psi(t),$$

$$L(t, \tau) = \frac{\partial F(t, \tau)}{\partial t} e^{-\int_\tau^t \psi(t) dt}, \quad K(t) = \frac{dE(t)}{dt} e^{-\int_0^t \psi(t) dt},$$

$$w_1(t) = W(t) e^{\int_0^t \psi(t) dt}.$$

⁴⁾ Vgl. Jahresber. d. D. Math.-Ver. 27 (1918), S. 51.

Die Funktionen $\psi(t)$, $t^{-s+1}K(t)$, $L(t, \tau)$ sind regulär, wenn t und τ in $\Re$ liegen. Es gilt die Gleichung

$$t \frac{dW(t)}{dt} = (r-1)W(t) + \int_0^t L(t, \tau) W(\tau) d\tau + K(t),$$

welche wir durch aufeinanderfolgende Näherungen lösen, indem wir setzen

$$t \frac{dW_v(t)}{dt} = (r-1)W_v(t) + \Phi_v(t) \quad (v=0, 1, 2, \dots)$$

$$\Phi_0(t) = K(t), \quad \Phi_v(t) = \int_0^t L(t, \tau) W_{v-1}(\tau) d\tau \quad (v=1, 2, \dots)$$

Die Differentialgleichung für $W_0(t)$ hat, wenn $j > 0$ und also s von r verschieden ist, eine partikuläre Lösung, welche gleich dem Produkt aus t^{s-1} und einer in $\Re$ regulären Funktion von t ist. Unter der Annahme, daß $W_{v-1}(t)$ gleich dem Produkt aus t^{s+v-2} und einer in $\Re$ regulären Funktion ist, ist $\Phi_v(t)$ gleich einer mit t^{s+v-1} multiplizierten regulären Funktion. Dann hat die Differentialgleichung für $W_v(t)$ eine mit t^{s+v} multiplizierte reguläre Funktion als partikuläre Lösung. Da $\bar{s} - \bar{r} + j + v > 0$ ist, erhält man eine solche Lösung in der Form

$$W_v(t) = t^{r-1} \int_0^t t^{-r} \Phi_v(t) dt \quad (v=0, 1, 2, \dots)$$

Wenn t und τ in $\Re$ liegen, möge $|K(t)| \leq K$, $|L(t, \tau)| \leq L$ sein. Wir nehmen an, in $\Re$ sei

$$W_{v-1}(t) \leq \mathfrak{G}_{v-1} T^{\bar{s}+v-2}.$$

Dann ist

$$|\Phi_v(t)| \leq \frac{L \mathfrak{G}_{v-1} T^{\bar{s}+v-1}}{\bar{s}+v-1},$$

$$|W_v(t)| \leq \frac{\kappa \kappa' L \mathfrak{G}_{v-1}}{\bar{s}+v-1} T^{\bar{r}-1} \int_0^T T^{\bar{s}-\bar{r}+v-1} dT = \frac{\kappa \kappa' L \mathfrak{G}_{v-1} T^{\bar{s}+v-1}}{(\bar{s}+v-1)(\bar{s}-\bar{r}+v)},$$

oder

$$|W_v(t)| \leq \mathfrak{G}_v T^{\bar{s}+v-1}, \quad \mathfrak{G}_v = \mathfrak{G}_{v-1} \cdot \frac{\kappa \kappa' L}{(\bar{s}+v-1)(\bar{s}-\bar{r}+v)}.$$

Daher ist die Reihe $\sum_{v=0}^{\infty} |t|^{-\bar{s}+1} |W_v(t)|$ in $\Re$ gleichmäßig konvergent.

Die Reihe $W(t) = \sum_{v=0}^{\infty} W_v(t)$, welche eine mit t^{s-1} multiplizierte, in $\Re$ reguläre Funktion darstellt, genügt der Integraldifferentialgleichung $W(t)$. Die Integralgleichungen (e) werden durch die Funktionen

$$) = W(t) e^{\int_0^t \psi(\tau) d\tau}, \quad w_\alpha(t) = E_\alpha(t) + \int_0^t F_\alpha(t, \tau) w_1(\tau) d\tau \quad (\alpha = 2, \dots, m)$$

edigt; $t^{-s+1} w_\alpha(t)$ ($\alpha = 1, \dots, m$) ist in $\Re$ regulär.

Im Falle $j = 0$ sind die Integralgleichungen (e) homogen; sie haben Lösung $w_\alpha(t)$ ($\alpha = 1, \dots, m$) von solcher Beschaffenheit, daß $t^{-r+1} w_\alpha(t)$ regulär ist⁵⁾.

§ 3.

Nach dem im § 2 bewiesenen Satze besitzen die Integralgleichungen (D_1) Lösung $w_\alpha(t)$ ($\alpha = 1, \dots, m$), für welche $t^{-r-j+1} w_\alpha(t)$, abgesehen von $-a_1, a_2 - a_1, \dots, a_m - a_1$ und ∞ , überall regulär ist. In einem um 0 beschriebenen Kreis, der keine der singulären Stellen $-a_1, a_2 - a_1, a_m - a_1$ enthält, gilt die konvergente Entwicklung

$$w_\alpha(t) = \sum_{n=j}^{\infty} \frac{A_{\alpha n} t^{r+n-1}}{\Gamma(r+n)} \quad (\alpha = 1, \dots, m).$$

Wenn man diese Reihen für die $w_\alpha(t)$ in die Gleichungen (C_1) setzt, erhält man dieselben Rekursionsformeln wie durch Einsetzung der Reihen

$$\psi_\alpha(x) = \sum_{n=j}^{\infty} A_{\alpha n} x^{r+n} \quad (\alpha = 1, \dots, m)$$

in die Gleichungen (B_1).

Die in den Gleichungen (A) auftretenden Potenzreihen $P_{\alpha\beta}(x)$, (x, y) seien für $|x| < \varrho$ bzw. $|x| < \varrho, |y| < \varrho$ konvergent, also, wenn $\frac{1}{\varrho}, \frac{1}{\sigma} < \varrho$ ist, für $x = \frac{1}{\sigma}$ bzw. $x = \frac{1}{\sigma}, y = \frac{1}{\sigma}$ absolut konvergent. Das gilt dann auch für die in (B_1) vorkommenden Potenzreihen $R_\alpha(x), y^{-r-j+1} S_\alpha(x, y)$. Demnach bestehen Ungleichungen

$$|a_{\alpha\beta}^{(\lambda)}| \leq a \sigma^\lambda, \quad |b_{\alpha\beta}^{(\lambda, \mu)}| \leq b \sigma^{\lambda+\mu}, \quad |c_\alpha^{(\lambda)}| \leq c \sigma^\lambda, \quad |d^{(\lambda, \mu)}| \leq d \sigma^{\lambda+\mu},$$

es ist

$$|g(t)| \leq a \sigma \sum_{\lambda=1}^{\infty} \sigma^{\lambda-1} \frac{|t|^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!} = a \sigma e^{\sigma|t|},$$

$$|h(t)| \leq b \sigma^{\lambda-1} \sum_{\mu=0}^{\infty} \sigma^{\mu+1} \frac{|t|^{\mu+1}}{(\mu+1)!} < b \sigma^{\lambda-1} e^{\sigma|t|},$$

⁵⁾ Vgl. Jahresber. d. D. Math.-Ver. 24 (1915), S. 213–216.

$$|N_a^{(\lambda)}(t)| \leq \sum_{\mu=0}^{\infty} b \sigma^{\lambda+\mu} \frac{\kappa |t|^{\bar{r}+j+\mu}}{|\Gamma(r+j+\mu+1)|} \leq \frac{\kappa b \sigma^{\lambda} |t|^{\bar{r}+j}}{|\Gamma(r+j+1)|} \sum_{\mu=0}^{\infty} \sigma^{\mu} \frac{|t|^{\mu}}{\mu!} = \\ = \Re \sigma^{\lambda} |t|^{\bar{r}+j} e^{\sigma |t|} \quad)$$

wegen $|\Gamma(r+j+\mu+1)| = |\Gamma(r+j+1)| \cdot |r+j+1| \dots |r+j+\mu|$
 $\geq |\Gamma(r+j+1)| \cdot \mu!$,

$$M_a(t) \leq \sum_{\lambda=0}^{\infty} c \sigma^{\lambda} \frac{\kappa |t|^{\bar{r}+j+\lambda-1}}{|\Gamma(r+j+\lambda)|} \leq \frac{\kappa c |t|^{\bar{r}+j-1}}{|\Gamma(r+j)|} + \frac{\kappa c \sigma |t|^{\bar{r}+j}}{|\Gamma(r+j+1)|} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \sigma^{\lambda-1} \frac{|t|^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!}$$

wegen $|\Gamma(r+j+\lambda)| \geq |\Gamma(r+j+1)| \cdot (\lambda-1)!$ für $\lambda = 1, 2, \dots$ oder
 wenn $|t| > 1$ und daher $|t|^{\bar{r}+j-1} < |t|^{\bar{r}+j} < |t|^{\bar{r}+j} e^{\sigma |t|}$ ist,

$$|M_a(t)| < \Re |t|^{\bar{r}+j} e^{\sigma |t|}.$$

Es sei $\mathfrak{S}$ ein Sektor, welcher von zwei von $t = 0$ nach $t = \infty$ gehenden Geraden begrenzt wird und weder im Innern noch auf der Begrenzung eine der Stellen $-a_1, a_2 - a_1, \dots, a_m - a_1$ enthält. Wir beweisen den Satz:

Im Sektor $\mathfrak{S}$ ist

$$|w_a(t)| < C e^{h|t|} \quad (\alpha = 1, \dots, m)$$

wenn $h > \frac{1}{\varrho}$ und C hinreichend groß ist⁶⁾.

Der Beweis wird nach der im Jahresber. d. D. Math.-Ver. 24 (1915), S. 321–322 benutzten, an Perron (Journ. f. Math. 143, S. 26–28) anknüpfenden Methode geführt. Es sei R ein positiver Wert und C so groß daß im Sektor $\mathfrak{S}$ für $|t| \leq R$

$$|w_a(t)| < C e^{h|t|} \quad (\alpha = 1, \dots, m)$$

ist. Wir zeigen, daß diese Ungleichungen auch für $|t| > R$ im Sektor $\mathfrak{S}$ gelten, wenn R hinreichend groß gewählt war. Unter der Voraussetzung daß dies nicht der Fall ist, verstehen wir unter R' die untere Grenze derjenigen Werte von $|t|$, für welche unsere Ungleichungen nicht bei beliebiger Wahl von $\arg t$ in $\mathfrak{S}$ gelten. Dann ist ein Wert $\alpha = \alpha'$ und ein dem Sektor $\mathfrak{S}$ angehörender Wert $t = t'$ vom absoluten Betrage $|t'| = R$ so vorhanden, daß $|w_{\alpha'}(t')| = C e^{h|t'|}$ ist, während man im Sektor $\mathfrak{S}$ für $|t| \leq R'$

$$|w_a(t)| \leq C e^{h|t|} \quad (\alpha = 1, \dots, m)$$

⁶⁾ Wenn $\arg t$ zwischen endlichen Schranken liegt, besteht eine Ungleichung $|t^r| \leq \kappa |t|^{\bar{r}}$.

⁷⁾ Im Falle $0 < \bar{r} + j < 1$, in welchem $w_a(t)$ für $t = 0$ unendlich wird, ist $|w_a(t)| < C e^{h|t|}$ für $|t| \geq t_0$, $|w_a(t)| < c |t|^{\bar{r}+j-1}$ für $|t| < t_0$. Dabei ist $t_0 >$ beliebig klein, c hinreichend groß zu nehmen.

Aus der Integralgleichung (C_1) folgt für $\alpha = \alpha'$, $t = t'$, wenn

$$\varphi \psi(t) = \int_0^t \varphi(t-\tau) \psi(\tau) d\tau$$

gesetzt wird:

$$\begin{aligned} -a_\alpha + a_1 \cdot |w_\alpha(t)| &\leq \sum_{\beta=1}^m |F_{\alpha\beta} w_\beta(t)| + \sum_{\beta=1}^m \left| \frac{G_{\alpha\beta}^{(0)} w_\beta(t)}{t+a_1} \right| \\ &+ \sum_{\beta=1}^m \left| \int_0^t \sum_{\lambda=1}^\infty \frac{(t-\tau)^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!} \frac{1}{\tau+a_1} G_{\alpha\beta}^{(\lambda)} w_\beta(\tau) d\tau \right| + |M_\alpha(t)| + \left| \frac{N_\alpha^{(0)}(t)}{t+a_1} \right| \\ &+ \left| \int_0^t \sum_{\lambda=1}^\infty \frac{(t-\tau)^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!} \frac{N_\alpha^{(\lambda)}(\tau)}{\tau+a_1} d\tau \right|. \end{aligned}$$

für der rechten Seite ist $|w_\beta(t)| \leq C e^{h|t|}$, also

$$\begin{aligned} |F_{\alpha\beta} w_\beta(t)| &< \int_0^{|t|} a \sigma e^{\sigma(|t|-\tau)} \cdot C e^{h|\tau|} d|\tau| \\ &= a C \sigma e^{\sigma|t|} \int_0^{|t|} e^{(h-\sigma)|\tau|} d|\tau| < a C \sigma e^{\sigma|t|} \cdot \frac{e^{(h-\sigma)|t|}}{h-\sigma} = \frac{a C \sigma e^{h|t|}}{h-\sigma}, \\ |G_{\alpha\beta}^{(\lambda)} w_\beta(t)| &< \int_0^{|t|} h \sigma^{\lambda-1} e^{\sigma(|t|-\tau)} \cdot C e^{h|\tau|} d|\tau| < \frac{b C \sigma^{\lambda-1} e^{h|t|}}{h-\sigma}; \end{aligned}$$

Wenn im Sektor $\mathfrak{S}$ $|t+a_1| \geq D > 0$ ist, hat man

$$\begin{aligned} \left| \frac{G_{\alpha\beta}^{(0)} w_\beta(t)}{t+a_1} \right| &< \frac{b C e^{h|t|}}{D \sigma (h-\sigma)}, \\ \left| \sum_{\lambda=1}^\infty \frac{(t-\tau)^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!} \frac{1}{\tau+a_1} G_{\alpha\beta}^{(\lambda)} w_\beta(\tau) d\tau \right| &< \int_0^{|t|} \sum_{\lambda=1}^\infty \frac{(|t|-\tau)^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!} \frac{b C \sigma^{\lambda-1} e^{h|\tau|}}{D (h-\sigma)} d|\tau| \\ \frac{b C}{D (h-\sigma)} \int_0^{|t|} e^{\sigma(|t|-\tau)} e^{h|\tau|} d|\tau| &= \frac{b C e^{\sigma|t|}}{D (h-\sigma)} \int_0^{|t|} e^{(h-\sigma)|\tau|} d|\tau| < \frac{b C e^{h|t|}}{D (h-\sigma)^2}, \\ \left| \frac{N_\alpha^{(0)}(t)}{t+a_1} \right| &\leq \frac{\Re |t|^{\bar{\tau}+j} e^{\sigma|t|}}{D}, \\ \left| \sum_{\lambda=1}^\infty \frac{(t-\tau)^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!} \frac{N_\alpha^{(\lambda)}(\tau)}{\tau+a_1} d\tau \right| &\leq \int_0^{|t|} \sum_{\lambda=1}^\infty \frac{(|t|-\tau)^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!} \frac{\Re \sigma^{\lambda} |t|^{\bar{\tau}+j} e^{\sigma|\tau|}}{D} d|\tau| \\ \frac{\Re \sigma}{D} \int_0^{|t|} e^{\sigma(|t|-\tau)} |\tau|^{\bar{\tau}+j} e^{\sigma|\tau|} d|\tau| &= \frac{\Re \sigma e^{\sigma|t|}}{D} \int_0^{|t|} |\tau|^{\bar{\tau}+j} d|\tau| = \frac{\Re \sigma |t|^{\bar{\tau}+j+1} e^{\sigma|t|}}{D (\bar{\tau}+j+1)}. \end{aligned}$$

Für $\alpha = \alpha'$, $t = t'$ ist also

$$|t - a_\alpha + a_1| \cdot C e^{h|t|} < \frac{m a \sigma C e^{h|t|}}{h - \sigma} + \frac{m b C e^{h|t|}}{D \sigma (h - \sigma)} + \frac{m b C e^{h|t|}}{D (h - \sigma)^2} \\ + \Re |t|^{\bar{r}+j} e^{\sigma|t|} + \frac{\Re |t|^{\bar{r}+j} e^{\sigma|t|}}{D} + \frac{\Re \sigma |t|^{\bar{r}+j+1} e^{\sigma|t|}}{D(\bar{r}+j-1)}$$

oder nach Division mit $C e^{h|t|}$

$$|t - a_\alpha + a_1| < \frac{m a \sigma}{h - \sigma} + \frac{m b}{D \sigma (h - \sigma)} + \frac{\Re |t|^{\bar{r}+j} e^{-(h-\sigma)|t|}}{C} \\ + \frac{\Re |t|^{\bar{r}+j} e^{-(h-\sigma)|t|}}{C D} + \frac{\Re \sigma |t|^{\bar{r}+j+1} e^{-(h-\sigma)|t|}}{C D (\bar{r}+j+1)}.$$

Wenn $h > \sigma$ ist, hat die rechte Seite für $\lim |t| = \infty$ einen endlichen, die linke Seite einen unendlichen Grenzwert. Da h beliebig wenig größer als σ und σ beliebig wenig größer als $\frac{1}{e}$ ist, so genügt es, $h > \frac{1}{e}$ anzunehmen. Nimmt man R hinreichend groß, so ist die linke Seite der für $|t| = R' \geq R$ geltenden Ungleichung kleiner als die linke, es ist also ein Widerspruch vorhanden.

Der bewiesene Satz kann folgendermaßen erweitert werden. Die absoluten Beträge der singulären Stellen seien kleiner als r . Wenn im Sektor $\mathfrak{S}$ $\omega_1 \leq \arg t \leq \omega_2$ ist, seien ω_1^* , ω_2^* irgend zwei endliche Zahlen, welche die Bedingung $\omega_1^* \leq \omega_1 < \omega_2 \leq \omega_2^*$ erfüllen. Im Bereich $\mathfrak{S}'$ sei $|t| < r$, $\omega_1 \leq \arg t \leq \omega_2$, im Bereich $\mathfrak{S}''$ $|t| \geq r$, $\omega_1^* \leq \arg t \leq \omega_2^*$. Der Bereich $\mathfrak{S}^*$ setze sich aus $\mathfrak{S}'$ und $\mathfrak{S}''$ zusammen. Dann ist im Bereich $\mathfrak{S}^*$

$$|w_\alpha(t)| < C^* e^{h|t|} \quad (\alpha = 1, \dots, m),$$

wenn $h > \frac{1}{e}$ und C^* hinreichend groß ist.

Wir verbinden zum Beweise einen beliebigen Punkt $t = |t| e^{i\omega}$ des Bereichs $\mathfrak{S}''$ mit dem Nullpunkt durch einen Weg, welcher aus folgenden Teilen besteht: 1. der Verbindungsgeraden der Punkte 0 und $r e^{i\omega_0}$, wo ω_0 ein fester Wert zwischen ω_1 und ω_2 ist, 2. dem die Punkte $r e^{i\omega_0}$ und $r e^{i\omega}$ verbindenden Bogen des Kreises vom Mittelpunkt 0 und vom Radius r , 3. der Verbindungsgeraden der Punkte $r e^{i\omega}$ und $|t| e^{i\omega}$. Die Länge dieses Weges bezeichnen wir mit T , die Länge von 0 bis zu einem beliebigen

^{a)} Im Falle $\bar{r}+j < 1$ kommen auf der rechten Seite dieser Ungleichung noch weitere Glieder mit $e^{-(h-\sigma)|t|}$ vor, welche das Ergebnis nicht beeinträchtigen. Man zerlegt nämlich bei der Abschätzung von $|F_{\alpha\beta} w_\beta(t)|$ und $|G_{\alpha\beta}^{(\lambda)} w_\beta(t)|$ die von 0 bis $|t|$ erstreckten Integrale in Integrale zwischen 0 und t_0 , worin man $|w_\beta(t)|$ durch $c |t|^{\bar{r}+j-1}$ ersetzt, und Integrale zwischen t_0 und $|t|$, worin $|w_\beta(t)|$ durch $C e^{h|t|}$ ersetzt wird; die letzteren Integrale werden vergrößert, wenn man die untere Grenze t_0 durch 0 ersetzt.

^{b)} Vg. Fußnote ^{c)}.

akt τ des Weges mit T . Wenn $h > \frac{1}{\varrho}$, $\varepsilon > 0$, $g = \frac{h}{1+\varepsilon} > \frac{1}{\varrho}$ ist, hat man in $\mathfrak{S}''$

$$|w_\alpha(t)| < C^* e^{gT} \quad (\alpha = 1, \dots, m).$$

Zum Beweise ersetzt man in den obigen Betrachtungen $|t|, |\tau|$ durch T . Wegen $|t| \leq T, |t - \tau| \leq T - T$ hat man

$$|F_{\alpha\beta}(t)| \leq \alpha \sigma e^{\sigma T}, \quad |F_{\alpha\beta} w_\beta(t)| \leq \alpha \sigma e^{\sigma(T-T)} \text{ usw.}$$

Nimmt man $|t|$ hinreichend groß, so ist $T < |t|(1 + \varepsilon)$, also

$$|w_\alpha(t)| < C^* e^{g(1+\varepsilon)|t|} = C^* e^{h|t|} \quad (\alpha = 1, \dots, m).$$

§ 4.

Die Integrale

$$\psi_\alpha(x) = \int_0^x w_\alpha(t) e^{-\frac{t}{x}} dt \quad (\alpha = 1, \dots, m),$$

die über die dem Sektor $\mathfrak{S}$ angehörende Gerade $\arg t = \omega$ erstreckt sind, sind in dem Kreise $\Re\left(\frac{e^{i\omega}}{x}\right) > \frac{1}{\varrho}$, welcher einen Teil des Kreises $|x| < \varrho$ bildet, absolut konvergent; es ist

$$x^2 \frac{d\psi_\alpha}{dx} = \int_0^\infty t w_\alpha(t) e^{-\frac{t}{x}} dt.$$

Im Kreise $\Re\left(\frac{e^{i\omega}}{x}\right) > \frac{1}{\varrho}$ gelten die Gleichungen

$$P_{\alpha\beta}(x) - a_\alpha \delta_{\alpha\beta} = \int_0^\infty F_{\alpha\beta}(t) e^{-\frac{t}{x}} dt^{10},$$

$$(P_{\alpha\beta}(x) - a_\alpha \delta_{\alpha\beta}) \psi_\beta(x) = \int_0^\infty F_{\alpha\beta} w_\beta(t) e^{-\frac{t}{x}} dt^{11},$$

$$R_\alpha(x) = \int_0^\infty M_\alpha(t) e^{-\frac{t}{x}} dt,$$

jedesmal über die Gerade $\arg t = \omega$ integriert wird. Gehört y dem Kreise $\Re\left(\frac{e^{i\omega}}{y}\right) > \frac{1}{\varrho}$ an, so ist

$$\sum_{\mu=0}^\infty b_{\alpha\beta}^{(\lambda, \mu)} y^{\mu+2} = \int_0^\infty G_{\alpha\beta}^{(\lambda)}(t) e^{-\frac{t}{y}} dt,$$

$$\sum_{\mu=0}^\infty b_{\alpha\beta}^{(\lambda, \mu)} y^{\mu+2} \cdot \psi_\beta(y) = \int_0^\infty G_{\alpha\beta}^{(\lambda)} w_\beta(t) e^{-\frac{t}{y}} dt,$$

¹⁰⁾ Vgl. Jahresber. d. D. Math.-Ver. 25 (1916), S. 321–322.

¹¹⁾ A. a. O. S. 323–325.

$$e^{-\frac{a_1}{y}} \sum_{\mu=0}^{\infty} b_{\alpha\beta}^{(\lambda, \mu)} y^{\mu+2} \cdot \psi_{\beta}(y) = \int_0^{\infty} G_{\alpha\beta}^{(\lambda)} w_{\beta}(t) e^{-\frac{t+a_1}{y}} dt.$$

Daraus folgt

$$\int_0^x e^{-\frac{a_1}{y}} \sum_{\mu=0}^{\infty} b_{\alpha\beta}^{(\lambda, \mu)} y^{\mu} \cdot \psi_{\beta}(y) dy = \int_0^{\infty} G_{\alpha\beta}^{(\lambda)} w_{\beta}(t) dt \int_0^x e^{-\frac{t+a_1}{y}} \frac{dy}{y^2},$$

wenn alle Punkte y des Integrationsweges $0 \dots x$ dem Kreise $\Re\left(\frac{e^{i\omega}}{y}\right) > \frac{1}{e}$ angehören. Wir wählen als äquivalenten Integrationsweg die Verbindungsgerade des Nullpunktes mit dem im Kreise $\Re\left(\frac{e^{i\omega}}{x}\right) > \frac{1}{e}$ gelegenen Punkt x .

Nun ist

$$\int_0^x e^{-\frac{t+a_1}{y}} \frac{dy}{y^2} = \frac{\left[e^{-\frac{t+a_1}{y}} \right]_0^x}{t+a_1} = \frac{e^{-\frac{t+a_1}{x}}}{t+a_1},$$

wenn $\lim_{y \rightarrow 0} e^{-\frac{t+a_1}{y}} = 0$ ist, falls y auf dem geradlinigen Weg $0 \dots x$ nach 0 geht. Dies ist der Fall, wenn $|\arg(t+a_1) - \arg x| < \frac{\pi}{2}$ oder, da $\arg(t+a_1)$ zwischen $\arg t = \omega$ und $\arg a_1$ liegt, wenn gleichzeitig $|\arg x - \omega| < \frac{\pi}{2}$ und $|\arg x - \arg a_1| < \frac{\pi}{2}$ ist. Die Bedingung $|\arg x - \omega| < \frac{\pi}{2}$ ist im Kreise $\Re\left(\frac{e^{i\omega}}{x}\right) > \frac{1}{e}$ von selbst erfüllt; die Bedingung $|\arg x - \arg a_1| < \frac{\pi}{2}$ ist im Falle $\omega = \arg a_1$ im ganzen Kreise erfüllt, sonst, da $-a_1$ ein singulärer Punkt von $w_{\alpha}(t)$ und daher $\omega = \arg a_1 \pm \pi$ ausgeschlossen ist, in einem Teil des Kreises. In dem durch $|\arg x - \arg a_1| < \frac{\pi}{2}$ bestimmten Abschnitt des Kreises $\Re\left(\frac{e^{i\omega}}{x}\right) > \frac{1}{e}$ ist

$$\int_0^x e^{-\frac{a_1}{y}} \sum_{\mu=0}^{\infty} b_{\alpha\beta}^{(\lambda, \mu)} y^{\mu} \cdot \psi_{\beta}(y) dy = \int_0^{\infty} \frac{G_{\alpha\beta}^{(\lambda)} w_{\beta}(t)}{t+a_1} e^{-\frac{t+a_1}{x}} dt,$$

$$\int_0^x e^{\frac{a_1}{x}} \frac{1}{y} \sum_{\mu=0}^{\infty} b_{\alpha\beta}^{(\lambda, \mu)} y^{\mu} \cdot \psi_{\beta}(y) dy = \int_0^{\infty} \frac{G_{\alpha\beta}^{(\lambda)} w_{\beta}(t)}{t+a_1} e^{-\frac{t}{x}} dt;$$

mit Rücksicht auf die Gleichung

$$x^{\lambda} = \int_0^{\infty} \frac{t^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!} e^{-\frac{t}{x}} dt$$

er $\lambda \geq 1$ hat man

$$x^\lambda \int_0^x e^{\frac{a_1}{x} - \frac{a_1}{y}} \sum_{\mu=0}^{\infty} b_{\alpha\beta}^{(\lambda, \mu)} y^\mu \cdot \psi_\beta(y) dy = \int_0^\infty \int_0^t \frac{(t-t)^\lambda - 1}{(\lambda-1)!} \frac{G_{\alpha\beta}^{(\lambda)} w_\beta(t)}{t+a_1} dt \cdot e^{-\frac{t}{x}} dt,$$

$$e^{\frac{a_1}{x} - \frac{a_1}{y}} \sum_{\mu=0}^{\infty} b_{\alpha\beta}^{(\lambda, \mu)} x^\lambda y^\mu \cdot \psi_\beta(y) dy = \int_0^\infty \sum_{\lambda=1}^{\infty} \int_0^t \frac{(t-t)^\lambda - 1}{(\lambda-1)!} \frac{G_{\alpha\beta}^{(\lambda)} w_\beta(t)}{t+a_1} dt \cdot e^{-\frac{t}{x}} dt$$

wegen der Konvergenz von

$$\int_0^\infty \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{(|t|-|t|)^\lambda - 1}{(\lambda-1)!} \left| \frac{G_{\alpha\beta}^{(\lambda)} w_\beta(t)}{t+a_1} \right| d|t| \cdot e^{-|t|\Re\left(\frac{e^{i\omega}}{x}\right)} d|t|$$

$$< \frac{b C \sigma}{D(h-\sigma)^2} \int_0^\infty e^{\left(h - \Re\left(\frac{e^{i\omega}}{x}\right)\right)|t|} d|t|$$

er $\Re\left(\frac{e^{i\omega}}{x}\right) > h$ oder für $\Re\left(\frac{e^{i\omega}}{x}\right) > \frac{1}{\varrho}$, da h beliebig wenig größer als $\frac{1}{\varrho}$

. Ferner ist für $\Re\left(\frac{e^{i\omega}}{y}\right) > \frac{1}{\varrho}$

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} q_{\alpha}^{(\lambda, \mu)} y^{r+j+\mu+1} = \int_0^\infty N_{\alpha}^{(\lambda)}(t) e^{-\frac{t}{y}} dt,$$

$$e^{-\frac{a_1}{y}} \sum_{\mu=0}^{\infty} q_{\alpha}^{(\lambda, \mu)} y^{r+j+\mu+1} = \int_0^\infty N_{\alpha}^{(\lambda)}(t) e^{-\frac{t+a_1}{y}} dt,$$

$$\int_0^x e^{-\frac{a_1}{y}} \sum_{\mu=0}^{\infty} q_{\alpha}^{(\lambda, \mu)} y^{r+j+\mu-1} dy = \int_0^\infty \frac{N_{\alpha}^{(\lambda)}(t)}{t+a_1} e^{-\frac{t}{x}} dt,$$

enn x demjenigen Abschnitt des Kreises $\Re\left(\frac{e^{i\omega}}{x}\right) > \frac{1}{\varrho}$ angehört, für welchen $|\arg x - \arg a_1| < \frac{\pi}{2}$ ist. In diesem Abschnitt ist auf Grund der obigen Schlußweise

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty} \int_0^x e^{\frac{a_1}{x} - \frac{a_1}{y}} \sum_{\mu=0}^{\infty} q_{\alpha}^{(\lambda, \mu)} x^\lambda y^{r+j+\mu-1} dy =$$

$$= \int_0^\infty \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{(t-t)^\lambda - 1}{(\lambda-1)!} \frac{N_{\alpha}^{(\lambda)}(t)}{t+a_1} dt \cdot e^{-\frac{t}{x}} dt.$$

hiernach ist in demjenigen Abschnitt des Kreises $\Re\left(\frac{e^{i\omega}}{x}\right) > \frac{1}{\varrho}$, in welchem $\arg x$ von $\arg a_1$ um weniger als $\frac{\pi}{2}$ abweicht,

$$J_{\alpha} = \int_0^\infty L_{\alpha} e^{-\frac{t}{x}} dt,$$

wenn die Gleichungen (B_1) in der Form $J_a = 0$ und die Gleichungen (C_1) in der Form $L_a = 0$ geschrieben werden. Demnach genügen die Laplace'schen Integrale für die $\psi_n(x)$ den Integraldifferentialgleichungen (B_1) , da die Funktionen $w_a(t)$ den Integralgleichungen (C_1) genügen.

Hiernach gilt der Satz:

Die homogenen Gleichungen (A_1) werden, wenn a eine der voneinander und von Null verschiedenen Zahlen $a_1, \dots, a_m$ ist, durch Reihen

$$\varphi_\alpha(x) = e^{-\frac{a}{x}} \sum_{n=0}^{\infty} A_{\alpha n} x^{r+n} \quad (\alpha = 1, \dots, m)$$

formal befriedigt. Sie gehen durch die Substitution

$$\varphi_\alpha(x) = e^{-\frac{a}{x}} \left(A_{\alpha 0} x^r + A_{\alpha 1} x^{r+1} + \dots + A_{\alpha, j-1} x^{r+j-1} + \psi_\alpha(x) \right) \quad (\alpha = 1, \dots, m),$$

wo j eine ganze positive Zahl und der reelle Teil von $r + j$ positiv ist, in die Gleichungen (B_1) über. Es sei z. B. $a = a_1$. Die aus (B_1) hergeleiteten Integralgleichungen (D_1) werden durch Funktionen $w_\alpha(t)$ befriedigt, welche sich im Endlichen abgesehen von den singulären Stellen $0, a_2 - a_1, \dots, a_m - a_1, -a_1$ regulär verhalten und in der Umgebung von $t = 0$ in die konvergenten Reihen

$$w_\alpha(t) = \sum_{n=j}^{\infty} A_{\alpha n} \frac{t^{r+n-1}}{\Gamma(r+n)} \quad (\alpha = 1, \dots, m)$$

entwickelbar sind. Sie erfüllen auf einer Geraden $\arg t = \omega$, die durch keine der von 0 verschiedenen singulären Stellen geht, die Ungleichungen

$$|w_\alpha(t)| < C e^{h|t|} \quad (\alpha = 1, \dots, m),$$

wo $h > \frac{1}{\varrho}^{12)}$ und C hinreichend groß ist. Die obigen Ausdrücke für die $\varphi_\alpha(x)$, worin

$$\psi_\alpha(x) = \int_0^\infty w_\alpha(t) e^{-\frac{t}{x}} dt \quad (\alpha = 1, \dots, m)$$

Laplace'sche Integrale mit dem Integrationsweg $\arg t = \omega$ sind, stellen in dem Kreisabschnitt

$$\Re\left(\frac{e^{i\omega}}{x}\right) > \frac{1}{\varrho}, \quad |\arg x - \arg a_1| < \frac{\pi}{2}$$

eine Lösung der Gleichungen (A_1) dar.

¹²⁾ Die Koeffizienten $P_{\alpha\beta}(x)$, $Q_{\alpha\beta}(x, y)$ von (A_1) sollen für $|x| < \varrho$ bzw. $|x| < \varrho, |y| < \varrho$ regulär sein.

Wenn die Wurzeln $a_1, \dots, a_m$ der Gleichung $|a_{\alpha\beta}^{(0)} - s\delta_{\alpha\beta}| = 0$ nicht sämtlich verschieden sind, wenn aber die Determinante $|a_{\alpha\beta}^{(0)} - s\delta_{\alpha\beta}|$ die Elementarteiler $s - a_1, \dots, s - a_m$ besitzt, erfahren die bisherigen Untersuchungen keine wesentliche Änderung. Es sei $a_1 = \dots = a_\mu = a$, während $a_{\mu+1}, \dots, a_m$ von a verschieden sind; a sei von 0 verschieden. Die zur Berechnung von $r, A_{a_1}, A_{a_2}, \dots$ dienenden Gleichungen in § 1 werden folgendermaßen gelöst. Die zu $\alpha = \mu + 1, \dots, m$ gehörigen Gleichungen des ersten Systems ergeben $A_{\mu+1,0} = \dots = A_{m,0} = 0$. Die zu $\alpha = 1, \dots, \mu$ gehörigen Gleichungen des zweiten Systems schreiben sich

$$(a_{11}^{(1)} - r)A_{10} + \dots + a_{\mu 1}^{(1)}A_{\mu 0} = 0,$$

.....

$$a_{\mu 1}^{(1)} A_{10} + \dots + (a_{\mu \mu}^{(1)} - r) A_{\mu 0} = 0.$$

Wir nehmen an, die Determinante $|a_{\alpha\beta}^{(1)} - s\delta_{\alpha\beta}|$ ($\alpha, \beta = 1, \dots, \mu$) habe die Elementarteiler $r - r_1, \dots, r - r_\mu$. Dann läßt sich durch eine lineare Transformation von $\varphi_1, \dots, \varphi_\mu$ erreichen, daß $a_{11}^{(1)} = r_1, \dots, a_{\mu\mu}^{(1)} = r_\mu, a_{\alpha\beta}^{(1)} = 0$ ($\alpha, \beta = 1, \dots, \mu; \alpha \geq \beta$) wird. Nach Bestimmung von $A_{10}, \dots, A_{\mu 0}$ ergeben sich $A_{\mu+1, 1}, \dots, A_{m1}$ aus den zu $\alpha = \mu + 1, \dots, m$ gehörigen Gleichungen des zweiten Systems. Die μ ersten Gleichungen des dritten Systems

$$(r_1 - r - 1)A_{11} + a_{1, \mu+1}^{(1)}A_{\mu+1, 1} + \dots + a_{1m}^{(1)}A_{m1} + \dots = 0,$$

$$\dots\dots\dots (r_{\mu} - r - 1)A_{\mu 1} + a_{\mu, u+1}^{(1)}A_{u+1, 1} + \dots + a_{m m}^{(i)}A_{m 1} + \dots = 0$$

ergeben $A_{11}, \dots, A_{\mu 1}$; wenn wir die weitere Annahme machen, daß zwischen $r_1, \dots, r_\mu$ keine von Null verschiedene ganzzahlige Differenz besteht, usw. Den μ Werten $a_1 = \dots = a_\mu = a$ entsprechen also μ Systeme von Reihen

$$\varphi_\alpha(x) = e^{-\frac{a}{x}} \sum_{n=0}^{\infty} A_{\alpha n} x^{r+n} \quad (\alpha = 1, \dots, \mu),$$

in welcher r die Werte $r_1, \dots, r_\mu$ hat und welche den Gleichungen (A_1) formal genügen. Die Integralgleichungen (D_1) haben jetzt die Form

$$t w_{\alpha}(t) = \sum_{\beta=1}^m \int_0^t f_{\alpha\beta}(t, \tau) w_{\beta}(\tau) d\tau + f_{\alpha}(t) \quad (\alpha = 1, \dots, \mu),$$

$$w_\alpha(t) = \sum_{\beta=1}^m \int_0^t f_{\alpha\beta}(t, \tau) w_\beta(\tau) d\tau + f_\alpha(t) \quad (\alpha = \mu + 1, \dots, m);$$

dabei ist $f_{\alpha\alpha}(0, 0) = a_{\alpha\alpha}^{(1)} = r_\alpha$ ($\alpha = 1, \dots, \mu$), $f_{\alpha\beta}(0, 0) = a_{\alpha\beta}^{(1)} = 0$ ($\alpha, \beta = 1, \dots, \mu$; $\alpha \geq \beta$) und $f_\alpha(t) = t^{r+j-1} h_\alpha(t)$ ($\alpha = 1, \dots, m$), wo $h_\alpha(t)$ abgesehen von $t = a_{m+1} - a, \dots, a_m - a, -a$ regulär und $h_\alpha(0) = 0$ ($\alpha = 1, \dots, \mu$) ist. In Anknüpfung an Jahresber. d. D. Math.-Ver. 24 (1915), S. 315–318 und 25 (1916), S. 76–78 findet man μ Lösungen mit in der Umgebung von $t = 0$ konvergenten Reihenentwicklungen

$$w_\alpha(t) = \sum_{n=j}^{\infty} \frac{A_{\alpha n} t^{r+n-1}}{\Gamma(r+n)} \quad (\alpha = 1, \dots, m),$$

wo r einen der Werte $r_1, \dots, r_\mu$ hat; $t^{-r-j+1} w_\alpha(t)$ ist außer an den angegebenen singulären Stellen regulär. Nach dieser Abänderung der Entwicklungen des § 2 kann man wie in § 3 und § 4 weiter schließen.

Auf den Fall beliebiger Elementarteiler der Determinante $|P_{\alpha\beta}(0) - s\delta_{\alpha\beta}|$ ($\alpha, \beta = 1, \dots, m$) gehen wir hier nicht ein.

II. Lineare Differentialgleichungen.

§ 5.

Das im Jahresber. d. D. Math.-Ver. 24 (1915), S. 310 f., 25 (1916), S. 74 f. und S. 301 f. behandelte System linearer Differentialgleichungen

$$(a) \quad x^{1-k} \frac{dy_\alpha}{dx} + \sum_{\beta=1}^m P_{\alpha\beta}(x) y_\beta = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, m),$$

wo

$$P_{\alpha\beta}(x) = a_\alpha \delta_{\alpha\beta} + \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{a_{\alpha\beta}^{(\lambda)}}{x^\lambda}$$

in der Umgebung von $x = \infty$ regulär ist und $a_1 = 0, a_2, \dots, a_m$ verschieden sind, wird, wenn $\mathfrak{U}_1^{(1)} = \dots = \mathfrak{U}_1^{(k-1)} = 0, r = \mathfrak{U}_1^{(k)}$ in der Bezeichnung Jahresber. 24, S. 311–312 ist, durch Reihen

$$y_\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_{\alpha n}}{x^{r+n}} \quad (\alpha = 1, \dots, m)$$

formal befriedigt. Indem wir zunächst den reellen Teil $\bar{r}$ von r positiv annehmen (was durch eine Substitution $y_\alpha = x^q z_\alpha$ erreicht werden kann), leiten wir durch die verallgemeinerte Laplacesche Transformation

$$y_\alpha = \int_0^\infty w_\alpha(t) e^{-tx} dt \quad (\alpha = 1, \dots, m)$$

ter Einführung der für alle endlichen t außer $t = 0$ regulären Funktionen

$$G_{\alpha\beta}(t) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{a_{\alpha\beta}^{(\lambda)} t^{\frac{\lambda}{k}-1}}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{k}\right)} \quad (\alpha, \beta = 1, \dots, m)$$

s System von Integralgleichungen

$$(kt - a_{\alpha}) w_{\alpha}(t) = \sum_{\beta=1}^m \int_0^t G_{\alpha\beta}(t - \tau) w_{\beta}(\tau) d\tau \quad (\alpha = 1, \dots, m)$$

r, welches durch die Reihen

$$w_{\alpha}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_{\alpha n} t^{\frac{r+n}{k}-1}}{\Gamma\left(\frac{r+n}{k}\right)} \quad (\alpha = 1, \dots, m)$$

mal befriedigt wird.

Hier werden die Eigenschaften der Funktionen $w_{\alpha}(t)$ aus den Integralgleichungen (b) hergeleitet, während nach der a. a. O. 25 (1916), S. 315 s 323 benutzten Methode die Funktionen $w_{\alpha}(t)$ auf die a. a. O. 24 (1915), 309 f. untersuchten Funktionen $w_{\alpha}^{(p)}(t)$ zurückzuführen sind.

Die Integralgleichungen (b) haben, wenn man

$$f_{1\beta}(t, \tau) = \frac{1}{k} G_{1\beta}(t - \tau), \quad f_{\alpha\beta}(t, \tau) = \frac{G_{\alpha\beta}(t - \tau)}{kt - a_{\alpha}} \quad (\alpha = 2, \dots, m)$$

etzt, die Form

$$tw_1(t) = \sum_{\beta=1}^m \int_0^t f_{1\beta}(t, \tau) w_{\beta}(\tau) d\tau,$$

$$w_{\alpha}(t) = \sum_{\beta=1}^m \int_0^t f_{\alpha\beta}(t, \tau) w_{\beta}(\tau) d\tau \quad (\alpha = 2, \dots, m).$$

unter Benutzung der im Jahresber. d. D. Math.-Ver. 24 (1915), S. 213—216 angeführten Bezeichnungen erhält man durch Elimination von $w_2(t), \dots, w_m(t)$ eine Integralgleichung

$$tw_1(t) = \int_0^t F(t, \tau) w_1(\tau) d\tau;$$

chdem diese gelöst ist, hat man

$$w_{\alpha}(t) = \int_0^t F_{\alpha}(t, \tau) w_1(\tau) d\tau \quad (\alpha = 2, \dots, m).$$

ir verstehen unter $\Re$ einen Bereich der t -Ebene, welcher aus Kreis-
ktoren vom Mittelpunkt $t = 0$ und von endlichen Radien besteht, die

ganze Umgebung von $t = 0$ ausfüllt und die Punkte $\frac{a_2}{k}, \dots, \frac{a_m}{k}$ weder in Innern noch auf dem Rande enthält. Wenn t dem Bereich $\Re$ und (wie wir jetzt immer annehmen) τ dem geradlinigen Integrationsweg $0 \dots$ angehört, sind $f_{\alpha\beta}(t, \tau)$ ($\alpha, \beta = 1, \dots, m$), $S_{\alpha\beta}(t, \tau)$ ($\alpha, \beta = 2, \dots, m$), $F_\alpha(t, \tau)$ ($\alpha = 2, \dots, m$), $F(t, \tau)$ abgesehen von dem Faktor $(t - \tau)^{\frac{1}{k}}$ reguläre Funktionen von t und $(t - \tau)^{\frac{1}{k}}$.

Zur Begründung diene folgendes. Zunächst ist

$$G_{\alpha\beta}(t) = t^{\frac{1}{k}-1} g_{\alpha\beta}\left(t^{\frac{1}{k}}\right),$$

wo $g_{\alpha\beta}(t)$ eine beständig konvergente Potenzreihe von t darstellt. Als ist, wenn α, β, λ Zahlen aus der Reihe $2, \dots, m$ sind,

$$\begin{aligned} f_{\alpha\beta}(t, \tau) &= \frac{(t - \tau)^{\frac{1}{k}-1} g_{\alpha\beta}\left((t - \tau)^{\frac{1}{k}}\right)}{kt - a_\alpha}, \\ \int_t^\tau f_{\alpha\lambda}(t, z) f_{\lambda\beta}(z, \tau) dz &= \int_\tau^t \frac{(t - z)^{\frac{1}{k}-1} (z - \tau)^{\frac{1}{k}-1} g_{\alpha\lambda}\left((t - z)^{\frac{1}{k}}\right) g_{\lambda\beta}\left((z - \tau)^{\frac{1}{k}}\right)}{(kt - a_\alpha)(kz - a_\lambda)} dz \\ &= \frac{(t - \tau)^{\frac{2}{k}-1}}{kt - a_\alpha} \int_0^1 \frac{\zeta^{\frac{1}{k}-1} (1 - \zeta)^{\frac{1}{k}-1} g_{\alpha\lambda}\left((t - \tau)^{\frac{1}{k}} \zeta^{\frac{1}{k}}\right) g_{\lambda\beta}\left((t - \tau)^{\frac{1}{k}} (1 - \zeta)^{\frac{1}{k}}\right)}{kt - a_\lambda - k(t - \tau)\zeta} d\zeta, \end{aligned}$$

wie sich durch Anwendung der Substitution

$$z = t - (t - \tau)\zeta$$

ergibt. Auf der Geraden $0 \dots t$ ist $\tau = \Theta t$ ($\Theta = 0 \dots 1$); der Ausdruck $kt - a_\lambda - k(t - \tau)\zeta = kt(1 - (1 - \Theta)\zeta) - a_\lambda = kt\vartheta - a_\lambda$ ($\vartheta = 0, \dots, 1$) verschwindet nur, wenn

$$t = \frac{a_\lambda}{k\vartheta} \quad (\vartheta = 1, \dots, 0)$$

ist. Wenn t nicht auf dieser Halbgeraden liegt, ist das letzte nach zwischen 0 und 1 genommene Integral in bezug auf t und $(t - \tau)^{\frac{1}{k}}$ regulär. Demnach ist $f_{\alpha\beta}^{(2)}(t, \tau)$ das Produkt aus $(t - \tau)^{\frac{2}{k}-1}$ und einer in $\Re$ regulären Funktion von t und $(t - \tau)^{\frac{1}{k}}$. Durch Fortsetzung dieser Schlußweise ergibt sich $f_{\alpha\beta}^{(n)}(t, \tau)$ als Produkt aus $(t - \tau)^{\frac{n}{k}-1}$ und einer in $\Re$ regulären

en Funktion von t und $(t - \tau)^{\frac{1}{k}}$. Hiernach erscheint $(t - \tau)^{1 - \frac{1}{k}} S_{\alpha\beta}(t, \tau)$ ($\beta = 2, \dots, m$) als in $\Re$ reguläre Funktion von t und $(t - \tau)^{\frac{1}{k}}$; dasselbe auf Grund der obigen Überlegung für $(t - \tau)^{1 - \frac{1}{k}} F_{\alpha}(t, \tau)$ ($\alpha = 2, \dots, m$) und $(t - \tau)^{1 - \frac{1}{k}} F(t, \tau)$.

Wir nehmen an,

$$F(t, \tau) = c(t - \tau)^{\frac{\kappa}{k} - 1} + \dots$$

das Produkt aus $(t - \tau)^{\frac{\kappa}{k} - 1}$, wo κ eine der Zahlen $1, 2, 3, \dots$ ist und einer regulären Funktion von t und $(t - \tau)^{\frac{1}{k}}$. Die Integralgleichung für $w_1(t)$ wird durch eine Reihe

$$w_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_{1n} t^{\frac{r+n}{k} - 1}}{\Gamma\left(\frac{r+n}{k}\right)}$$

befriedigt. Ihre linke Seite beginnt nach Einsetzung dieser Reihe mit

$$\frac{A_{10} t^{\frac{r}{k}}}{\Gamma\left(\frac{r}{k}\right)},$$

die rechte Seite mit

$$\frac{c A_{10}}{\Gamma\left(\frac{r}{k}\right)} \int_0^t (t - \tau)^{\frac{\kappa}{k} - 1} \tau^{\frac{r}{k} - 1} d\tau = \frac{c A_{10} \Gamma\left(\frac{\kappa}{k}\right)}{\Gamma\left(\frac{r+\kappa}{k}\right)} t^{\frac{r+\kappa}{k} - 1},$$

daß $\kappa = k$ sein muß. $F(t, \tau)$ ist also eine in $\Re$ reguläre Funktion von t und $(t - \tau)^{\frac{1}{k}}$, welche für $t = \tau$ den Wert c annimmt. Jetzt beginnt die rechte Seite der vorhin betrachteten Gleichung mit

$$\frac{c A_{10} t^{\frac{r}{k}}}{\Gamma\left(\frac{r}{k} + 1\right)} = \frac{c A_{10} t^{\frac{r}{k}}}{\frac{r}{k} \Gamma\left(\frac{r}{k}\right)},$$

daß $c = F(0, 0) = \frac{r}{k}$ ist.

Durch Differentiation geht die Integralgleichung für $w_1(t)$ über in

$$t \frac{dw_1(t)}{dt} = (F(t, t) - 1) w_1(t) + \int_0^t \frac{\partial F(t, \tau)}{\partial t} w_1(\tau) d\tau.$$

Wenn wir

$$F(t, t) = \frac{r}{k} + t\psi(t), \quad \frac{\partial F(t, \tau)}{\partial t} = L(t, \tau) e^{\int_{\tau}^t \psi(t) dt}$$

setzen, sind die Funktionen $\psi(t)$ und $(t - \tau)^{\frac{1}{k}-1} L(t, \tau)$ regulär, wenn t und τ in $\Re$ liegen. Setzen wir weiter

$$w_1(t) = W(t) e^{\int_0^t \psi(t) dt},$$

so gilt die Gleichung

$$t \frac{dW(t)}{dt} = \left(\frac{r}{k} - 1\right) W(t) + \int_0^t L(t, \tau) W(\tau) d\tau,$$

die wir durch die Kette von Differentialgleichungen

$$t \frac{dW_0(t)}{dt} = \left(\frac{r}{k} - 1\right) W_0(t),$$

$$t \frac{dW_\nu(t)}{dt} = \left(\frac{r}{k} - 1\right) W_\nu(t) + \Phi_\nu(t), \quad \Phi_\nu(t) = \int_0^t L(t, \tau) W_{\nu-1}(\tau) d\tau \quad (\nu = 1, 2, \dots)$$

mit den Lösungen

$$W_0(t) = t^{\frac{r}{k}-1},$$

$$W_\nu(t) = t^{\frac{r}{k}-1} \int_0^t t^{-\frac{r}{k}} \Phi_\nu(t) dt \quad (\nu = 1, 2, \dots)$$

ersetzen. Wenn $\arg t$ zwischen endlichen Schranken bleibt, bestehen Ungleichungen $\left| t^{\frac{r}{k}} \right| \leq \kappa |t|^{\frac{\bar{r}}{k}}, \quad \left| t^{-\frac{r}{k}} \right| \leq \kappa' |t|^{-\frac{\bar{r}}{k}}$. Wir nehmen an, in $\Re$ sei

$$|W_{\nu-1}(t)| \leq \mathfrak{C}_{\nu-1} |t|^{\frac{\bar{r}+\nu-1}{k}-1}.$$

Wenn $|L(t, \tau)| \leq M(|t| - |\tau|)^{\frac{1}{k}-1}$ ist, hat man

$$|\Phi_\nu(t)| \leq M \mathfrak{C}_{\nu-1} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{k}\right) \Gamma\left(\frac{\bar{r}+\nu-1}{k}\right)}{\Gamma\left(\frac{\bar{r}+\nu}{k}\right)} |t|^{\frac{\bar{r}+\nu}{k}-1},$$

$$|W_\nu(t)| \leq \mathfrak{C}_\nu t^{\frac{\bar{r}+\nu}{k}-1}, \quad \mathfrak{C}_\nu = \mathfrak{C}_{\nu-1} \cdot M \kappa \kappa' k \frac{\Gamma\left(\frac{1}{k}\right) \Gamma\left(\frac{\bar{r}+\nu-1}{k}\right)}{\nu \Gamma\left(\frac{\bar{r}+\nu}{k}\right)}.$$

Demnach ist die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} t^{-\frac{r}{k}+1} W_\nu(t)$$

in $\Re$ absolut und gleichmäßig konvergent und stellt eine in $\Re$ reguläre Funktion dar. Die Gleichung für $W(t)$ hat die Lösung

$$W(t) = \sum_{v=0}^{\infty} W_v(t),$$

Die Gleichungen (b) die Lösung

$$w_1(t) = W(t) e^{\int_0^t \psi(\tau) d\tau}, \quad w_\alpha(t) = \int_0^t F_\alpha(t, \tau) w_1(\tau) d\tau \quad (\alpha = 2, \dots, m);$$

jede dieser Funktionen ist das Produkt aus $t^{\frac{r}{k}-1}$ und einer in $\Re$ regulären Funktion von t .

Wenn alle Funktionen $P_{\alpha\beta}(x)$ im Gebiet $\Re(x^k e^{i\omega}) > \sigma(\omega) \geq 0$ regulär sind, ist für $t = |t| e^{i\omega}$

$$|G_{\alpha\beta}(t)| < A |t|^{\frac{1}{k}-1} e^{(\sigma(\omega) + \varepsilon)|t|^{18}},$$

wo ε eine beliebig kleine und A eine hinreichend große positive Zahl ist, die von ω unabhängig angenommen werden kann. Der Sektor $\mathfrak{S}$ sei von zwei von $t=0$ ins Unendliche gehenden Geraden begrenzt und enthalte

keine singulären Stellen $\frac{a_2}{k}, \dots, \frac{a_m}{k}$ weder im Innern noch auf dem Rande.

Wenn $t = |t| e^{i\omega}$ dem Sektor $\mathfrak{S}$ angehört, ist

$$|w_\alpha(t)| < C e^{h|t|^{14}} \quad (\alpha = 1, \dots, m),$$

wo $h > \sigma(\omega)$ und C hinreichend groß ist.

Zum Beweise nach der in § 3 benutzten Methode brauchen wir nur zu zeigen, daß die Annahme, es sei $|w_\alpha(t)| = C e^{h|t|}$ für $\alpha = \alpha'$, $t = t'$, wo $|t'| = R'$ hinreichend groß ist, und $|w_\alpha(t)| \leq C e^{h|t|}$ für $\alpha = 1, \dots, m$ und für $|t| \leq R'$ in $\mathfrak{S}$, auf einen Widerspruch führt. Auf Grund der aus (b) folgenden Ungleichung

$$|kt - a_\alpha| \cdot |w_\alpha(t)| \leq \sum_{\beta=1}^m \int_0^{|t|} |G_{\alpha\beta}(t - \tau)| \cdot |w_\beta(\tau)| d|\tau|$$

so nach der gemachten Annahme für $\alpha = \alpha'$, $t = t'$

¹³⁾ Dies folgt aus Jahresber. d. D. Math.-Ver. 25, S. 221 oben.

¹⁴⁾ Im Falle $r < k$, in welchem $w_\alpha(t)$ für $t=0$ unendlich ist, ist, wenn t_0 eine beliebig kleine positive Zahl bedeutet, $|w_\alpha(t)| < C e^{h|t|}$ für $|t| \geq t_0$, $|w_\alpha(t)| < c |t|^{\frac{r}{k}-1}$ für $|t| < t_0$; C und c sind hinreichend große positive Größen.

$$\begin{aligned}
|t - a_\alpha| \cdot C e^{h|t|} &\leq m \int_0^{|t|} A(|t| - |\tau|)^{\frac{1}{k}-1} e^{(\sigma(\omega) + \varepsilon)(|t| - |\tau|)} \cdot C e^{h|\tau|} d|\tau| \\
&= m A C e^{(\sigma(\omega) + \varepsilon)|t|} \int_0^{|t|} (|t| - |\tau|)^{\frac{1}{k}-1} e^{(h - \sigma(\omega) - \varepsilon)|\tau|} d|\tau| \\
&< m A C e^{(\sigma(\omega) + \varepsilon)|t|} e^{(h - \sigma(\omega) - \varepsilon)|t|} \int_0^{|t|} (|t| - |\tau|)^{\frac{1}{k}-1} d|\tau| \\
&= m A C k |t|^{\frac{1}{k}} e^{h|t|} \quad 15)
\end{aligned}$$

oder nach Division mit $C |t|^{\frac{1}{k}} e^{h|t|}$

$$|t|^{1-\frac{1}{k}} \left| k - \frac{t}{a_\alpha} \right| < m A k.$$

Im Falle $k > 1$ hat die linke Seite für $\lim |t| = \infty$ einen unendlichen Grenzwert, während die rechte Seite endlich ist. Im Falle $k = 1$ haben wir

$$\begin{aligned}
|t - a_\alpha| \cdot C e^{h|t|} &\leq m A C e^{(\sigma(\omega) + \varepsilon)|t|} \int_0^{|t|} e^{(h - \sigma(\omega) - \varepsilon)|\tau|} d|\tau| \\
&< m A C e^{(\sigma(\omega) + \varepsilon)|t|} \cdot \frac{e^{(h - \sigma(\omega) - \varepsilon)|t|}}{h - \sigma(\omega) - \varepsilon} = \frac{m A C e^{h|t|}}{h - \sigma(\omega) - \varepsilon}
\end{aligned}$$

oder nach Division mit $C e^{h|t|}$

$$|t - a_\alpha| < \frac{m A}{h - \sigma(\omega) - \varepsilon},$$

so daß wieder ein Widerspruch vorhanden ist.

¹⁵⁾ Im Falle $\bar{r} < k$ kommt auf der rechten Seite hinzu (vgl. Fußnote ⁸⁾):

$$\begin{aligned}
&m \int_0^{\bar{r}} A(|t| - |\tau|)^{\frac{1}{k}-1} e^{(\sigma(\omega) + \varepsilon)(|t| - |\tau|)} \cdot C |\tau|^{\frac{\bar{r}}{k}-1} d|\tau| \\
&< m A C e^{(\sigma(\omega) + \varepsilon)|t|} \int_0^{|t|} (|t| - |\tau|)^{\frac{1}{k}-1} |\tau|^{\frac{\bar{r}}{k}-1} d|\tau| \\
&= m A C e^{(\sigma(\omega) + \varepsilon)|t|} \cdot |t|^{\frac{\bar{r}+1}{k}-1} \int_0^1 (1-\zeta)^{\frac{1}{k}-1} \zeta^{\frac{\bar{r}}{k}-1} d\zeta \\
&= \frac{m A C \Gamma\left(\frac{1}{k}\right) \Gamma\left(\frac{\bar{r}}{k}\right)}{\Gamma\left(\frac{\bar{r}+1}{k}\right)} |t|^{\frac{\bar{r}+1}{k}-1} e^{(\sigma(\omega) + \varepsilon)|t|}.
\end{aligned}$$

Nach Division mit $C |t|^{\frac{1}{k}} e^{h|t|}$ oder im Falle $k = 1$ mit $C e^{h|t|}$ hat dieses Zusatzglied für $\lim |t| = \infty$ den Grenzwert 0.

Hiernach sind die verallgemeinerten Laplaceschen Integrale

$$y_\alpha = \int_0^\infty w_\alpha(t) e^{-tx^k} dt \quad (\alpha = 1, \dots, m),$$

wenn auf dem keine der Stellen $a_2, \dots, a_m$ enthaltenden Integrationsweg $\arg t = 2q\pi + \omega$ ($q = 0, 1, \dots, k-1$) ist, in dem Gebiet

$$\Re(x^k e^{i\omega}) > \sigma(\omega), \quad \frac{(2q - \frac{1}{2})\pi - \omega}{k} < \arg x < \frac{(2q + \frac{1}{2})\pi - \omega}{k}$$

konvergent und genügen den Differentialgleichungen (a)

Wenn man die im Jahresber. 24, S. 323 f. dargestellte Methode zur Entwicklung der Laplaceschen Integrale in Fakultätenreihen auf die hier benutzten verallgemeinerten Laplaceschen Integrale anwendet, erhält man nicht eigentliche Fakultätenreihen, sondern Reihen, deren Glieder Quotienten von Gammafunktionen, aber nicht rationale Funktionen von x sind. Um Reihen mit rationalen Gliedern zu erhalten, benutzt man dieselbe Integraldarstellung wie im Jahresber. 24, S. 309 f., die sich aus der jetzigen Integraldarstellung herleiten läßt. Vgl. Jahresber. 25, S. 318–319, und für nicht-lineare Differentialgleichungen S. 307–308.

§ 6.

Die Betrachtungen des § 5 gestalten wir in verschiedener Hinsicht um, um im III. Abschnitt ihre Übertragung auf die Gleichungen (A) vornehmen zu können. Die Annahme $\bar{r} > 0$ ist jetzt nicht erforderlich.

Die ganze positive Zahl j sei so gewählt, daß $\bar{r} + j > 0$ ist. Durch die Substitution

$$y_\alpha = \frac{A_{\alpha 0}}{x^{\bar{r}}} = \frac{A_{\alpha 1}}{x^{\bar{r}+1}} + \dots + \frac{A_{\alpha, j-1}}{x^{\bar{r}+j-1}} + z_\alpha \quad (\alpha = 1, \dots, m)$$

gehen die Differentialgleichungen (a) über in

$$x^{1-k} \frac{dz_\alpha}{dx} + \sum_{\beta=1}^m P_{\alpha\beta}(x) z_\beta + P_\alpha(x) = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, m);$$

$$P_\alpha(x) = \frac{1}{x^{\bar{r}}} \sum_{\beta=1}^m P_{\alpha\beta}(x) \left(A_{\beta 0} + \frac{A_{\beta 1}}{x} + \dots + \frac{A_{\beta, j-1}}{x^{j-1}} \right) - \frac{1}{x^{\bar{r}+k}} \left(r A_{\alpha 0} + \frac{(r+1) A_{\alpha 1}}{x} + \dots + \frac{(r+j-1) A_{\alpha, j-1}}{x^{j-1}} \right)$$

ist an allen regulären Stellen der Funktionen $P_{\alpha\beta}(x)$ außer $x=0$ regulär; wenn man $z_1, \dots, z_m$ durch 0 ersetzt, fallen in den Gleichungen (a) oder

(c) die Glieder mit $\frac{1}{x^{\bar{r}}}, \frac{1}{x^{\bar{r}+1}}, \dots, \frac{1}{x^{\bar{r}+j-1}}$ und in der ersten Gleichung außerdem die Glieder mit $\frac{1}{x^{\bar{r}+j}}, \dots, \frac{1}{x^{\bar{r}+j+k-1}}$ fort, so daß

$$P_\alpha(x) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{a_\alpha^{(\lambda)}}{x^{r+j+\lambda}} \quad (\alpha = 1, \dots, m)$$

und $a_1^{(0)} = a_1^{(1)} = \dots = a_1^{(k-1)} = 0$ ist. Durch die verallgemeinerte Laplacesche Transformation

$$z_\alpha = \int_0^x w_\alpha(t) e^{-tx^k} dt \quad (\alpha = 1, \dots, m)$$

erhält man jetzt die Integralgleichungen

$$(d) \quad (kt - a_\alpha) w_\alpha(t) = \sum_{\beta=1}^m \int_0^t G_{\alpha\beta}(t-\tau) w_\beta(\tau) d\tau + G_\alpha(t) \quad (\alpha = 1, \dots, m);$$

darin ist

$$G_\alpha(t) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{a_\alpha^{(\lambda)} t^{\frac{r+j+\lambda}{k}-1}}{\Gamma\left(\frac{r+j+\lambda}{k}\right)}.$$

Setzt man

$$f_1(t) = \frac{1}{k} G_1(t), \quad f_\alpha(t) = \frac{G_\alpha(t)}{kt - a_\alpha} \quad (\alpha = 2, \dots, m),$$

so schreiben sich die Integralgleichungen (d)

$$tw_1(t) = \sum_{\beta=1}^m f_{1\beta}(t, \tau) w_\beta(\tau) d\tau + f_1(t),$$

$$w_\alpha(t) = \sum_{\beta=1}^m f_{\alpha\beta}(t, \tau) w_\beta(\tau) d\tau + f_\alpha(t) \quad (\alpha = 2, \dots, m).$$

Hieraus erhält man wie in § 3 durch Elimination von $w_2(t), \dots, w_m(t)$ die Gleichung

$$tw_1(t) = \int_0^t F(t, \tau) w_1(\tau) d\tau + E(t).$$

Im Falle $\bar{r} > 0$, in welchem die Betrachtungen von § 5 gelten, kommen in $F(t, \tau)$ Glieder mit $(t-\tau)^{\frac{1}{k}-1}, \dots, (t-\tau)^{\frac{k-1}{k}-1}$ nicht vor. Die Koeffizienten von $(t-\tau)^{\frac{\kappa}{k}-1}$ ($\kappa = 1, \dots, k-1$), welche nur von $a_{\alpha\beta}^{(\lambda)}$ ($\lambda = 1, \dots, k-1$), aber nicht von $a_{\alpha\beta}^{(\lambda)}$ ($\lambda = k, k+1, \dots$) abhängen, verschwinden infolge der Bedingungen $\mathfrak{A}_1^{(1)} = 0, \mathfrak{A}_1^{(2)} = 0, \dots, \mathfrak{A}_1^{(k-1)} = 0$ und daher unabhängig davon, ob $r = \mathfrak{A}_1^{(k)}$ positiv ist oder nicht. Die Differentialgleichungen für die z_α werden durch die Reihen

$$z_\alpha = \sum_{n=j}^{\infty} \frac{A_{\alpha n}}{x^{r+n}}$$

und demnach die Integralgleichung für $w_1(t)$ durch die Reihe

$$w_1(t) = \sum_{n=j}^{\infty} \frac{A_{1,n} t^{\frac{r+n}{k}-1}}{\Gamma\left(\frac{r+n}{k}\right)}$$

normal befriedigt; da bei Einsetzung dieser Reihe sowohl die linke Seite als auch das erste Glied der rechten Seite mit Konst. t^{r+j} beginnt, so gilt dasselbe für $E(t)$.

Durch Differentiation erhält man die Gleichung

$$t \frac{dw_1(t)}{dt} = (F(t, t) - 1) w_1(t) + \int_0^t \frac{\partial F(t, \tau)}{\partial t} w_1(\tau) d\tau + \frac{dE(t)}{dt}$$

Wenn wir die obigen Bezeichnungen benutzen und

$$K(t) = \frac{dE(t)}{dt} e^{-\int_0^t \psi(\tau) d\tau}$$

setzen, so daß $K(t)$ das Produkt aus $t^{\frac{r+j}{k}-1}$ und einer in $\Re$ regulären Funktion von $t^{\frac{1}{k}}$ ist, so haben wir die Gleichung

$$t \frac{dW(t)}{dt} = \frac{r}{k} W(t) + \int_0^t L(t, \tau) W(\tau) d\tau + K(t),$$

welche wir durch die Kette von Differentialgleichungen

$$t \frac{dW_r(t)}{dt} = \frac{r}{k} W_r(t) + \Phi_r(t) \quad (r = 0, 1, 2, \dots),$$

$$\Phi_0(t) = K(t), \quad \Phi_r(t) = \int_0^t L(t, \tau) W_{r-1}(\tau) d\tau \quad (r = 1, 2, \dots)$$

mit den Lösungen

$$W_r(t) = t^{\frac{r}{k}} \int_0^t t^{-\frac{r}{k}-1} \Phi_r(t) dt \quad (r = 0, 1, 2, \dots)$$

ersetzen. Wir haben

$$|W_r(t)| \leq \mathfrak{G}_r |t|^{\frac{r+j+r}{k}-1},$$

$$\frac{\mathfrak{G}_r}{\mathfrak{G}_{r-1}} = k \kappa' M \frac{\Gamma\left(\frac{1}{k}\right) \Gamma\left(\frac{\bar{r}+j+r-1}{k}\right)}{(j+r) \Gamma\left(\frac{\bar{r}+j+r}{k}\right)}.$$

Wie in § 5 ergibt sich nun, daß die Integralgleichungen (d) durch Funk-

tionen $w_\alpha(t)$ von solcher Beschaffenheit befriedigt werden, daß $t^{-\frac{\bar{r}+j}{k}+1} w_\alpha(t)$ in $\Re$ regulär ist.

In dem Gebiet $\Re(x^k e^{i\omega}) > \sigma(\omega)$ sind nicht nur die Funktionen $P_{\alpha\beta}(x)$, sondern, wenn $\sigma(\omega) \geq 0$ ist und daher $x=0$ nicht im Innern des Gebietes liegt¹⁶⁾, auch die Funktionen $P_\alpha(x)$ regulär. Es bestehen daher Ungleichungen

$$|G_\alpha(t)| \leq B |t|^{\frac{\bar{r}+j}{k}-1} e^{(\sigma(\omega)+\varepsilon)|t|},$$

wo ε beliebig klein und B hinreichend groß ist.

Wenn $h > \sigma(\omega)$ und C hinreichend groß genommen wird, ist im Sektor $\mathfrak{S}$

$$|w_\alpha(t)| < C e^{h|t|} \quad (17) \quad (\alpha = 1, \dots, m).$$

Wenn man dieselbe Schlußweise und Bezeichnungsweise wie in § 5 anwendet, ist für $\alpha = \alpha'$, $t = t'$

$$|kt - a_\alpha| \cdot C e^{h|t|} \leq m A C k |t|^{\frac{1}{k}} e^{h|t|} + B |t|^{\frac{\bar{r}+j}{k}-1} e^{(\sigma(\omega)+\varepsilon)|t|} \quad (18),$$

$$|t|^{1-\frac{1}{k}} \cdot \left| k - \frac{a_\alpha}{t} \right| \leq m A k + \frac{B}{C} |t|^{\frac{\bar{r}+j-1}{k}-1} e^{-(h-\sigma(\omega)-\varepsilon)|t|}.$$

Im Falle $k=1$ hat man

$$|t - a_\alpha| \cdot C e^{h|t|} \leq \frac{m A C e^{h|t|}}{h - \sigma(\omega) - \varepsilon} + B |t|^{\frac{\bar{r}+j}{k}-1} e^{(\sigma(\omega)+\varepsilon)|t|},$$

$$|t - a_\alpha| \leq \frac{m A}{h - \sigma(\omega) - \varepsilon} + \frac{B}{C} |t|^{\frac{\bar{r}+j}{k}-1} e^{(\sigma - \sigma(\omega) - \varepsilon)|t|}.$$

Man schließt weiter wie in § 5.

Die Lösung unseres Systems linearer Differentialgleichungen erscheint in einer anderen Form, wenn man *eine neue unabhängige Veränderliche* einführt. Wir erhalten so ein Verfahren, das wir in § 7 auf Integral-differentialgleichungen zu übertragen haben und das wir hier für Differentialgleichungen ohne Ausführung der Beweise andeuten.

¹⁶⁾ Indem man x durch $x + \text{Konst.}$ ersetzt, erreicht man, daß $x=0$ eine singuläre Stelle mindestens einer der Funktionen $P_{\alpha\beta}(x)$ wird.

¹⁷⁾ Im Falle $\bar{r}+j < k$ gilt diese Ungleichung für $|t| \geq t_0$ ($t_0 > 0$ beliebig klein),

während $|w_\alpha(t)| < c |t|^{\frac{\bar{r}+j}{k}-1}$ für $|t| < t_0$ ist.

¹⁸⁾ Im Falle $\bar{r}+j < k$ kommt auf der rechten Seite das Glied hinzu (vgl. § 5):

$$\frac{m B c \Gamma\left(\frac{1}{k}\right) \Gamma\left(\frac{\bar{r}+j}{k}\right)}{\Gamma\left(\frac{\bar{r}+j+1}{k}\right)} |t|^{\frac{\bar{r}+j+1}{k}-1} e^{(\sigma(\omega)+\varepsilon)|t|}.$$

Die Differentialgleichungen (c) gehen unter Einführung der Veränder-
en

$$\xi = \frac{x^k}{k} + b' \frac{x^{k-1}}{k-1} + \dots + b^{(k-1)} x,$$

$b', \dots, b^{(k-1)}$ beliebige Konstante sind, in

$$\frac{dz_\alpha}{d\xi} + \sum_{\beta=1}^m \mathfrak{P}_{\alpha\beta}(\xi) z_\beta + \mathfrak{P}_\alpha(\xi) = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, m)$$

und dabei sind die Funktionen

$$\mathfrak{P}_{\alpha\beta}(\xi) = \frac{P_{\alpha\beta}(x)}{1 + \frac{b'}{x} + \dots + \frac{b^{(k-1)}}{x^{k-1}}}, \quad \mathfrak{P}_\alpha(\xi) = \frac{P_\alpha(x)}{1 + \frac{b'}{x} + \dots + \frac{b^{(k-1)}}{x^{k-1}}}$$

sehen von $x=0$ im Regularitätsgebiet der Funktionen $P_{\alpha\beta}(x)$
falls regulär, wenn man von den Nullstellen $q', \dots, q^{(k-1)}$ von
 $1 + b'x^{k-2} + \dots + b^{(k-1)}$ absieht. Die Werte $\xi = q', \dots, q^{(k-1)}$,
die zu $x = q', \dots, q^{(k-1)}$ gehören, sind Verzweigungsstellen der
Funktion x von ξ , welche in der Umgebung von $\xi = \infty$ eine Entwicklung
der Form

$$x = (k\xi)^{\frac{1}{k}} \left(1 + \frac{c_1}{\xi^{\frac{1}{k}}} + \frac{c_2}{\xi^{\frac{2}{k}}} + \dots \right)$$

ist. Dann gelten in der Umgebung von $\xi = \infty$ Reihenentwicklungen

$$\mathfrak{P}_{\alpha\beta}(\xi) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{a_{\alpha\beta}^{(\lambda)}}{\xi^{\frac{\lambda}{k}}}, \quad \mathfrak{P}_\alpha(\xi) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{a_\alpha^{(\lambda)}}{\xi^{\frac{r+j+\lambda}{k}}}.$$

$a_{\alpha\beta}^{(0)} = a_\alpha \delta_{\alpha\beta}$ ist. Singuläre Stellen von $\mathfrak{P}_{\alpha\beta}(\xi)$ sind außer der Ver-
zweigungsstelle $\xi = \infty$ die Werte $q', \dots, q^{(k-1)}$ sowie die Werte von ξ ,
die den singulären Stellen von $P_{\alpha\beta}(x)$ entsprechen.

Die Laplacesche Transformation

$$z_\alpha = \int_0^\infty w_\alpha(t) e^{-t\xi} dt \quad (\alpha = 1, \dots, m)$$

führt auf die Integralgleichungen

$$(t - a_\alpha) w_\alpha(t) = \sum_{\beta=1}^m \int_0^t \mathfrak{G}_{\alpha\beta}(t - \tau) w_\beta(\tau) d\tau + \mathfrak{G}_\alpha(t) \quad (\alpha = 1, \dots, m),$$

$$\mathfrak{G}_{\alpha\beta}(t) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{a_{\alpha\beta}^{(\lambda)} t^{\frac{\lambda}{k} - 1}}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{k}\right)}, \quad \mathfrak{G}_\alpha(t) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{a_\alpha^{(\lambda)} t^{\frac{r+j+\lambda}{k} - 1}}{\Gamma\left(\frac{r+j+\lambda}{k}\right)}$$

für alle t außer $t=0$ konvergent sind. Die Gleichungen (b) werden durch Funktionen $w_\alpha(t)$ von solcher Beschaffenheit befriedigt, daß

$t^{-\frac{r+j}{k}+1} w_\alpha(t)$ in der Umgebung von $t=0$ in eine konvergente Potenzreihe von $t^{\frac{1}{k}}$ entwickelbar ist. Auf einer Geraden $\arg t = \omega$, welche durch keine der singulären Stellen $a_1, \dots, a_m$ geht, ist $w_\alpha(t)$ abgesehen von $t=0$ regulär und erfüllt die Bedingung

$$|w_\alpha(t)| < C e^{(\varepsilon(\omega) + \varepsilon)|t|},$$

wo ε eine beliebig kleine und C eine hinreichend große positive GröÙe ist. $\varepsilon(\omega)$ ist dadurch definiert, daß die Funktionen $\mathfrak{P}_{\alpha\beta}(\varepsilon)$ im Gebiet $\Re(\varepsilon e^{i\omega}) > \varepsilon(\omega)$ abgesehen von $\varepsilon = \infty$ regulär sind. Die obigen über die Gerade $\arg t = \omega$ erstreckten Laplaceschen Integrale für die Funktionen z_α sind in diesem Gebiet konvergent und genügen den Differentialgleichungen (c).

III. Homogene Gleichungen, $k > 1$.

§ 7.

Es sei jetzt k eine beliebige ganze positive Zahl.

Die Gleichungen (A) werden durch Reihen

$$\varphi_\alpha(x) = e^{-\vartheta(x)} \sum_{n=0}^{\infty} A_{\alpha n} x^{r+n} \quad (\alpha = 1, \dots, m)$$

formal befriedigt, wo

$$\vartheta(x) = \frac{a}{kx^k} + \frac{a^{(1)}}{(k-1)x^{k-1}} + \dots + \frac{a^{(k-1)}}{x}$$

und a eine der voneinander und von 0 verschiedenen Zahlen $a_1, \dots, a_m$ ist.

Wir nehmen $a = a_1$ an. Durch die Substitution $\varphi_\alpha(x) = e^{-\vartheta(x)} \Phi_\alpha(x)$ erhalten wir die Gleichungen

$$\begin{aligned} x^{k+1} \frac{d\Phi_\alpha(x)}{dx} &= \sum_{\beta=1}^m (P_{\alpha\beta}(x) - (a + a^{(1)}x + \dots + a^{(k-1)}x^{k-1}) \delta_{\alpha\beta}) \Phi_\beta(x) \\ &+ \sum_{\beta=1}^m \int_0^x Q_{\alpha\beta}(x, y) e^{\vartheta(x) - \vartheta(y)} \Phi_\beta(y) dy \quad (\alpha = 1, \dots, m) \end{aligned}$$

Die Integrale

$$J_\mu = \int_0^x y^{r+\mu} e^{\vartheta(x) - \vartheta(y)} dy \quad (\mu = 0, 1, 2, \dots)$$

sind konvergent, wenn der Integrationsweg den Nullpunkt innerhalb des

ors $\frac{\arg a - \frac{\pi}{2}}{k} < \arg y < \frac{\arg a + \frac{\pi}{2}}{k}$ verläßt, so daß $\lim |\arg \vartheta(y)| < \frac{\pi}{2}$ ist.
 ch wiederholte Anwendung der Formel

$$= -\frac{1}{a} x^{r+\mu+k+1} - \frac{a^{(1)}}{a} J_{\mu+1} - \dots - \frac{a^{(k-1)}}{a} J_{\mu+k-1} - \frac{r+\mu+k+1}{a} J_{\mu+k}$$

lt man die formale Reihenentwicklung

$$J_{\mu} = -\frac{1}{a} x^{r+\mu+k+1} + \frac{a^{(1)}}{a^2} x^{r+\mu+k+2} + \dots$$

t man in den obigen Gleichungen $\Phi_{\alpha}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{\alpha n} x^{r+n}$ und ver-

ht man, nachdem die Integrale durch formale Reihen ersetzt sind, in
 zu $\alpha = 1$ gehörigen Gleichung die Koeffizienten von $x^r, x^{r+1}, \dots, x^{r+k-1},$
 $x^{r+k+1}, \dots, x^{r+k+j-1}$, so erhält man $a = a_1, a^{(1)}, \dots, a^{(k-1)}, r,$
 $\dots, A_{1,j-1}$, während A_{10} unbestimmt bleibt. Wenn man in der zu
 $2, \dots, m$ gehörigen Gleichung die Koeffizienten von $x^r, x^{r+1}, \dots, x^{r+j-1}$
 leicht, ergeben sich $A_{\alpha 0} = 0, A_{\alpha 1}, \dots, A_{\alpha, j-1}$. Wenn man in den
 graldifferentialgleichungen für $\Phi_1, \dots, \Phi_m$ Φ_{α} durch $A_{\alpha 0} x^r + A_{\alpha 1} x^{r+1}$
 $\dots + A_{\alpha, j-1} x^{r+j-1}$ ersetzt, drückt sich der Unterschied zwischen der
 en und der rechten Seite bei der ersten Gleichung durch $x^{r+k+j},$
 $x^{r+k+j+1}, \dots$, bei den übrigen Gleichungen durch $x^{r+j}, x^{r+j+1}, \dots$ aus.

Unter der Annahme, daß $\bar{r} + j > 0$ und $j > 0$ ist, setzen wir

$$\varphi_{\alpha}(x) = e^{-\vartheta(x)} (A_{\alpha 0} x^r + A_{\alpha 1} x^{r+1} + \dots + A_{\alpha, j-1} x^{r+j-1} + \psi_{\alpha}(x))$$

$$(\alpha = 1, \dots, m).$$

Gleichungen für die Φ_{α} gehen, wenn man J_{μ} ($\mu < j-1$) durch
 $x^{r+\mu+k+1}, \dots, x^{r+j+k-1}, J_{j-1}, \dots, J_{j+k-1}$ ausdrückt, in die Gleichungen

$$\left\{ \begin{aligned} x^{k+1} \frac{d\psi_{\alpha}(x)}{dx} &= \sum_{\beta=1}^m (P_{\alpha\beta}(x) - (a + a^{(1)}x + \dots + a^{(k-1)}x^{k-1}) \delta_{\alpha\beta}) \psi_{\beta}(x) \\ &+ \sum_{\beta=1}^m \int_0^x Q_{\alpha\beta}(x, y) e^{\vartheta(x) - \vartheta(y)} \psi_{\beta}(y) dy + R_{\alpha}(x) + \\ &+ \int_0^x S_{\alpha}(x, y) e^{\vartheta(x) - \vartheta(y)} dy \end{aligned} \right. \quad (\alpha = 1, \dots, m)$$

; dabei ist

$$R_{\alpha}(x) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} c_{\alpha}^{(\lambda)} x^{r+j+\lambda}, \quad S_{\alpha}(x, y) = \sum_{\lambda, \mu=0}^{\infty} d_{\alpha}^{(\lambda, \mu)} x^{\lambda} y^{r+j+\mu-1} \quad (\alpha = 1, \dots, m)$$

und $c_1^{(0)} = c_1^{(1)} = \dots = c_1^{(k-1)} = 0$, weil, wenn man $\psi_1, \dots, \psi_m$ durch Null ersetzt, in den Gleichungen (B) die Glieder mit $x^r, x^{r+1}, \dots, x^{r+j-1}$ und in der ersten Gleichung außerdem diejenigen mit $x^{r+j}, \dots, x^{r+j+k-1}$ fallen. Die Funktionen $x^{-r-j} R_a(x)$, $y^{-r-j+1} S_a(x, y)$ sind in der Umgebung von $x=0$ bzw. $x=0, y=0$ regulär.

Wir setzen

$$\vartheta(x) = \frac{a}{x},$$

so daß

$$x = \xi^{\frac{1}{k}} f(\xi^{\frac{1}{k}}), \quad dx = \xi^{\frac{1}{k}-1} g(\xi^{\frac{1}{k}}) d\xi$$

ist, wo $f(\xi), g(\xi)$ in der Umgebung von $\xi=0$ regulär sind und $f(0) = k$, $g(0) = k^{-\frac{1}{k}-1}$ ist. Dadurch gehen die Gleichungen (B) über in

$$(B) \quad \left\{ \begin{aligned} \xi^2 \frac{d\psi_\alpha(x)}{d\xi} &= \sum_{\beta=1}^m (\mathfrak{P}_{\alpha\beta}(\xi^{\frac{1}{k}}) - a_1 \delta_{\alpha\beta}) \psi_\beta(x) + \\ &+ \sum_{\beta=1}^m \int_0^\xi \mathfrak{Q}_{\alpha\beta}(\xi^{\frac{1}{k}}, \eta^{\frac{1}{k}}) \eta^{\frac{1}{k}-1} e^{\frac{a_1}{\xi} - \frac{a_1}{\eta}} \psi_\beta(y) d\eta + \\ &+ \mathfrak{R}_\alpha(\xi^{\frac{1}{k}}) + \int_0^\xi \mathfrak{S}_\alpha(\xi^{\frac{1}{k}}, \eta^{\frac{1}{k}}) e^{\frac{a_1}{\xi} - \frac{a_1}{\eta}} d\eta \end{aligned} \right. \quad (\alpha = 1, \dots, m)$$

$\mathfrak{P}_{\alpha\beta}(\xi^{\frac{1}{k}})$, $\mathfrak{Q}_{\alpha\beta}(\xi^{\frac{1}{k}}, \eta^{\frac{1}{k}})$, $\mathfrak{R}_\alpha(\xi^{\frac{1}{k}})$, $\mathfrak{S}_\alpha(\xi^{\frac{1}{k}}, \eta^{\frac{1}{k}})$ gehen aus $P_{\alpha\beta}(x)$, $Q_{\alpha\beta}(x, y)$, $R_\alpha(x)$, $S_\alpha(x, y)$ durch Division mit $1 + \frac{a^{(1)}}{a}x + \dots + \frac{a^{(k-1)}}{a}x^{k-1}$ hervor, es ist

$$\mathfrak{P}_{\alpha\beta}(\xi) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{\alpha\beta}^{(\lambda)} \xi^\lambda; \quad a_{\alpha\alpha}^{(0)} = a_\alpha, \quad a_{\alpha\beta}^{(0)} = 0 \quad (\alpha \neq \beta),$$

$$\mathfrak{Q}_{\alpha\beta}(\xi, \eta) = \sum_{\lambda, \mu=0}^{\infty} b_{\alpha\beta}^{(\lambda, \mu)} \xi^\lambda \eta^\mu,$$

$$\mathfrak{R}_\alpha(\xi) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} c_\alpha^{(\lambda)} \xi^{r+j+\lambda}; \quad c_1^{(0)} = c_1^{(1)} = \dots = c_1^{(k-1)} = 0,$$

$$\mathfrak{S}_\alpha(\xi, \eta) = \sum_{\lambda, \mu=0}^{\infty} d_\alpha^{(\lambda, \mu)} \xi^\lambda \eta^{r+j+\mu}.$$

Die Laplacesche Transformation

$$\psi_\alpha(x) = \int_0^\infty w_\alpha(t) e^{-\frac{t}{x}} dt \quad (\alpha = 1, \dots, m)$$

bei zunächst formaler Rechnung zu den Integralgleichungen

$$\left\{ \begin{aligned} (t - a_\alpha + a_1) w_\alpha(t) &= \sum_{\beta=1}^m \mathfrak{F}_{\alpha\beta} w_\beta(t) + \frac{1}{t + a_1} \sum_{\beta=1}^m \mathfrak{G}_{\alpha\beta}^{(0)} w_\beta(t) + \\ &+ \sum_{\beta=1}^m \int_0^t \sum_{\lambda=1}^\infty \frac{(t-\tau)^{\frac{\lambda}{k}-1}}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{k}\right)} \frac{1}{\tau + a_1} \mathfrak{G}_{\alpha\beta}^{(\lambda)} w_\beta(\tau) d\tau + \mathfrak{M}_\alpha(t) + \frac{\mathfrak{N}_\alpha^{(0)}(t)}{t + a_1} + \\ &+ \int_0^t \sum_{\lambda=1}^\infty \frac{(t-\tau)^{\frac{\lambda}{k}-1}}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{k}\right)} \frac{\mathfrak{N}_\alpha^{(\lambda)}(\tau)}{\tau + a_1} d\tau \quad (\alpha = 1, \dots, m); \end{aligned} \right.$$

sind die für alle t außer $t=0$ konvergenten Reihen eingeführt:

$$\mathfrak{F}_{\alpha\beta}(t) = \sum_{\lambda=1}^\infty \frac{a_{\alpha\beta}^{(\lambda)} t^{\frac{\lambda}{k}-1}}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{k}\right)},$$

$$\mathfrak{G}_{\alpha\beta}^{(\lambda)}(t) = \sum_{\mu=0}^\infty \frac{b_{\alpha\beta}^{(\lambda, \mu)} t^{\frac{\mu+1}{k}}}{\Gamma\left(\frac{\mu+1}{k} + 1\right)} \quad (\lambda = 0, 1, 2, \dots),$$

$$\mathfrak{M}_\alpha(t) = \sum_{j=0}^\infty \frac{c_\alpha^{(j)} t^{\frac{r+j+\lambda}{k}-1}}{\Gamma\left(\frac{r+j+\lambda}{k}\right)},$$

$$\mathfrak{N}_\alpha^{(\lambda)}(t) = \sum_{\mu=0}^\infty \frac{b_\alpha^{(\lambda, \mu)} t^{\frac{r+j+\mu}{k}}}{\Gamma\left(\frac{r+j+\mu}{k} + 1\right)} \quad (\lambda = 0, 1, 2, \dots).$$

Integralgleichungen ($\mathfrak{G}$) können auch in der Form geschrieben werden:

$$\left\{ \begin{aligned} (t - a_\alpha + a_1) w_\alpha(t) &= \sum_{\beta=1}^m \int_0^t \left\{ \mathfrak{F}_{\alpha\beta}(t - \tau) + \frac{1}{t + a_1} \mathfrak{G}_{\alpha\beta}^{(0)}(t - \tau) + \right. \\ &+ \left. \int_\tau^t \sum_{\lambda=1}^\infty \frac{(t-z)^{\frac{\lambda}{k}-1}}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{k}\right)} \frac{1}{z + a_1} \mathfrak{G}_{\alpha\beta}^{(\lambda)}(z - \tau) dz \right\} w_\beta(\tau) d\tau + \\ &+ \mathfrak{M}_\alpha(t) + \frac{\mathfrak{N}_\alpha^{(0)}(t)}{t + a_1} + \int_0^t \sum_{\lambda=1}^\infty \frac{(t-\tau)^{\frac{\lambda}{k}-1}}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{k}\right)} \frac{\mathfrak{N}_\alpha^{(\lambda)}(\tau)}{\tau + a_1} d\tau \quad (\alpha = 1, \dots, m). \end{aligned} \right.$$

Es möge die Veränderliche τ die Grade $0 \dots t$ und die Veränderliche z der Grade $\tau \dots t$ durchlaufen.

Die Funktionen $t^{-\frac{r+j}{k}} \mathfrak{M}_1(t)$, $t^{1-\frac{r+j}{k}} \mathfrak{M}_a(t)$ ($a = 2, \dots, m$), $t^{-\frac{r+j}{k}} \mathfrak{N}_a^{(\lambda)}(t)$ ($a = 1, \dots, m$) sind ganze transzendente Funktionen von $t^{\frac{1}{k}}$; $(t-\tau)^{-\frac{1}{k}} \mathfrak{S}_{a\beta}(t-\tau)$ und $(t-\tau)^{-\frac{1}{k}} \mathfrak{G}_{a\beta}^{(\lambda)}(t-\tau)$ sind ganze transzendente Funktionen von $(t-\tau)^{\frac{1}{k}}$.
Durch die Substitution $\tau = t\zeta$ erhält man

$$\begin{aligned} & \int_0^t \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{(t-\tau)^{\frac{\lambda}{k}-1} \mathfrak{M}_a^{(\lambda)}(\tau)}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{k}\right) \tau - a_1} d\tau = \\ & = t^{\frac{r+j+1}{k}} \int_0^1 \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{t^{\frac{\lambda-1}{k}} (1-\zeta)^{\frac{\lambda}{k}-1}}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{k}\right)} \frac{1}{a_1 + t\zeta} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{\mathfrak{b}_{a\beta}^{(\lambda, \mu)} t^{\frac{\mu}{k}} \zeta^{\frac{r+j+\mu}{k}}}{\Gamma\left(\frac{r+j+1}{k} + 1\right)} d\zeta; \end{aligned}$$

das letzte über die Gerade $0 \dots 1$ erstreckte Integral ist für alle endlichen t regulär mit Ausnahme des Punktes $t=0$, wo es eine reguläre

Funktion von $t^{\frac{1}{k}}$ ist, und der Punkte der Geraden $t = -\frac{a_1}{\zeta}$ ($\zeta = 0 \dots 1$). Die Substitution $z = t - (t-\tau)\zeta$ ergibt

$$\begin{aligned} & \int_{\tau}^t \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{(t-z)^{\frac{\lambda}{k}-1}}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{k}\right)} \frac{1}{z + a_1} \mathfrak{G}_{a\beta}^{(\lambda)}(z-\tau) dz = \\ & = (t-\tau)^{\frac{r}{k}} \int_0^1 \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{(t-\tau)^{\frac{\lambda-1}{k}} \zeta^{\frac{\lambda}{k}-1}}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{k}\right)} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{\mathfrak{b}_{a\beta}^{(\lambda, \mu)} (t-\tau)^{\frac{\mu}{k}} (1-\zeta)^{\frac{\mu+1}{k}}}{\Gamma\left(\frac{\mu+1}{k} + 1\right)} \frac{d\zeta}{a_1 + t - (t-\tau)\zeta} \end{aligned}$$

auf der Geraden $0 \dots t$ ist $\tau = \Theta t$ ($\Theta = 0 \dots 1$), also

$$a_1 + t - (t-\tau)\zeta = a_1 + t(1 - (1-\Theta)\zeta) = a_1 + t\vartheta \quad (\vartheta = 0 \dots 1)$$

so daß $a_1 + t - (t-\tau)\zeta$ nur dann verschwindet, wenn $t = -\frac{a_1}{\vartheta}$ ($\vartheta = 1 \dots 0$) ist; das letzte über die Gerade $0 \dots 1$ erstreckte Integral ist eine reguläre Funktion von t und $(t-\tau)^{\frac{1}{k}}$, wenn τ auf der Geraden $0 \dots t$, aber nicht auf der Halbgeraden $t = -\frac{a_1}{\vartheta}$ ($\vartheta = 1 \dots 0$) liegt.

§ 8.

Das Gebiet $\mathfrak{T}$ sei von allen Punkten t (mit Ausschluß von $t = \infty$) gebildet, deren Verbindungsstrecke mit $t=0$ keine der singulären Stellen $-a_1, a_2 - a_1, \dots, a_m - a_1$ enthält; τ sei ein Punkt der Strecke $0 \dots t$. Wenn wir die Gleichungen ($\mathfrak{D}$) in der Form

$$t w_1(t) = \sum_{\beta=1}^m \int_0^t f_{1\beta}(t, \tau) w_\beta(\tau) d\tau + f_1(t),$$

$$w_\alpha(t) = \sum_{\beta=1}^m \int_0^t f_{\alpha\beta}(t, \tau) w_\beta(\tau) d\tau + f_\alpha(t) \quad (\alpha = 2, \dots, m)$$

eben, sind die Funktionen $t^{-\frac{r+j}{k}} f_1(t)$, $t^{1-\frac{r+j}{k}} f_\alpha(t)$ ($\alpha = 2, \dots, m$) in reguläre Funktionen von $t^{\frac{1}{k}}$, während $(t-\tau)^{1-\frac{1}{k}} f_{\alpha\beta}(t, \tau)$ ($\alpha, \beta = 1, \dots, m$)

reguläre Funktion von t und $(t-\tau)^{\frac{1}{k}}$ ist. Die in $f_{\alpha\beta}(t, \tau)$ ($\alpha, \beta = 1, \dots, m$) enthaltenen Glieder mit $(t-\tau)^{\frac{1}{k}-1}$, $(t-\tau)^{\frac{2}{k}-1}$, ..., $(t-\tau)^{\frac{k-1}{k}-1}$ rühren nur von $\mathfrak{F}_{\alpha\beta}$, aber nicht von $\mathfrak{G}_{\alpha\beta}^{(\lambda)}$ ($\lambda = 0, 1, 2, \dots$),

in $f_\alpha(t)$ enthaltenen Glieder mit $t^{\frac{r+j}{k}-1}$, $t^{\frac{r+j+1}{k}-1}$, ..., $t^{\frac{r+j-1}{k}}$ nur von $\mathfrak{F}_\alpha(t)$ und nicht von $\mathfrak{N}_\alpha^{(\lambda)}(t)$ ($\lambda = 0, 1, 2, \dots$) her. Die bezeichneten bleiben also ungeändert, wenn man die Funktionen $\mathfrak{G}_{\alpha\beta}^{(\lambda)}$ und $\mathfrak{N}_\alpha^{(\lambda)}$ durch 0, d. h. die Integraldifferentialgleichungen (A) durch die Differentialgleichungen

$$x^{k+1} \frac{d\varphi_\alpha(x)}{dx} = \sum_{\beta=1}^m P_{\alpha\beta}(x) \varphi_\beta(x) \quad (\alpha = 1, \dots, m)$$

ersetzt.

Wenn wir aus den Integralgleichungen (D) wie in § 2 $w_2(t)$, ..., $w_m(t)$ eliminieren, erhalten wir eine Integralgleichung

$$t w_1(t) = \int_0^t F(t, \tau) w_1(\tau) d\tau + E(t),$$

in nach § 6 $F(t, \tau)$ eine mit $(t-\tau)^{\frac{1}{k}-1}$ multiplizierte in $\mathfrak{T}$ reguläre Funktion von t und $(t-\tau)^{\frac{1}{k}}$ und $E(t)$ eine mit $t^{\frac{r+j}{k}-1}$ multiplizierte in $\mathfrak{T}$ reguläre Funktion von $t^{\frac{1}{k}}$ ist. Wenn wir diese Integralgleichung nicht mit den Gleichungen (A), sondern aus den Differentialgleichungen

$$x^{k+1} \frac{d\varphi_\alpha(x)}{dx} = \sum_{\beta=1}^m P_{\alpha\beta}(x) \varphi_\beta(x) \quad (\alpha = 1, \dots, m)$$

ausgehen, kommen in $F(t, \tau)$ Glieder mit $(t-\tau)^{\frac{1}{k}-1}$, $(t-\tau)^{\frac{2}{k}-1}$, ..., $(t-\tau)^{\frac{k-1}{k}-1}$ und in $E(t)$ Glieder mit $t^{\frac{r+j}{k}-1}$, $t^{\frac{r+j+1}{k}-1}$, ..., $t^{\frac{r+j-1}{k}}$ nicht

vor. Da aber diese Glieder sich beim Übergang von den Gleichungen (A) zu den Differentialgleichungen nicht ändern, so ist auch in unserem Falle

$F(t, \tau)$ eine in $\mathfrak{T}$ reguläre Funktion von t und $(t - \tau)^{\frac{1}{k}}$ und $E(t)$ gleich dem Produkt aus $t^{\frac{r+j}{k}}$ und einer in $\mathfrak{T}$ regulären Funktion von $t^{\frac{1}{k}}$. Wie in § 6 ergibt sich $w_\alpha(t)$ als Produkt aus $t^{\frac{r+j-1}{k}}$ und einer in $\mathfrak{T}$, also auch in der Umgebung von $t=0$, regulären Funktion von $t^{\frac{1}{k}}$.

Wir nehmen an, die Potenzreihen $\mathfrak{P}_{\alpha\beta}(\xi)$, $\mathfrak{Q}_{\alpha\beta}(\xi, \eta)$, $\xi^{-r-j} \mathfrak{M}_\alpha(\xi)$, $\eta^{-r-j} \mathfrak{S}_\alpha(\xi, \eta)$ seien für $|\xi| < \varrho$ bzw. $|\xi| < \varrho$, $|\eta| < \varrho$ konvergent, so daß, wenn $\sigma > \frac{1}{\varrho}$ angenommen wird,

$$|a_{\alpha\beta}^{(\lambda)}| \leq a \sigma^\lambda, \quad |b_{\alpha\beta}^{(\lambda, \mu)}| \leq b \sigma^{\lambda+\mu}, \quad |c_\alpha^{(\lambda)}| \leq c \sigma^\lambda, \quad |d_{\alpha\beta}^{(\lambda, \mu)}| \leq d \sigma^{\lambda+\mu}$$

ist. Dann ist

$$|\mathfrak{F}_{\alpha\beta}(t)| \leq a \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{\sigma^\lambda |t|^{\frac{\lambda}{k}-1}}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{k}\right)} < \mathfrak{A} |t|^{\frac{1}{k}-1} e^{\sigma^k |t|^{19}},$$

$$|\mathfrak{G}_{\alpha\beta}^{(\lambda)}(t)| \leq b \sigma^{\lambda-1} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(\sigma |t|^{\frac{1}{k}})^{\mu+1}}{\Gamma\left(\frac{\mu+1}{k} + 1\right)} < b \sigma^{\lambda-1} E_{\frac{1}{k}}(\sigma |t|^{\frac{1}{k}}) < \mathfrak{B} \sigma^\lambda e^{\sigma^k |t|}.$$

Ferner ist, wenn $\arg t$ zwischen endlichen Schranken bleibt,

$$|\mathfrak{N}_\alpha^{(\lambda)}(t)| \leq \kappa d \sigma^\lambda \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{\sigma^\mu |t|^{\frac{\bar{r}+j+\mu}{k}}}{\left| \Gamma\left(\frac{r+j+\mu}{k} + 1\right) \right|}.$$

oder, da eine Ungleichung

$$\frac{\Gamma\left(\frac{\mu}{k} + 1\right)}{\left| \Gamma\left(\frac{r+j+\mu}{k} + 1\right) \right|} < c \quad (\mu = 0, 1, 2, \dots)$$

besteht,

$$|\mathfrak{N}_\alpha^{(\lambda)}(t)| < \kappa c d \sigma^\lambda |t|^{\frac{\bar{r}+j}{k}} E_{\frac{1}{k}}(\sigma |t|^{\frac{1}{k}}) < \mathfrak{N} \sigma^\lambda |t|^{\frac{\bar{r}+j}{k}} e^{\sigma^k |t|}.$$

Endlich haben wir

$$|\mathfrak{M}_\alpha(t)| \leq \kappa c \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{\sigma^\lambda |t|^{\frac{\bar{r}+j+\lambda-1}{k}}}{\left| \Gamma\left(\frac{r+j+\lambda}{k}\right) \right|};$$

¹⁹⁾ Vgl. Jahresber. d. D. Math.-Ver. 25 (1916), S. 309.

$|t| > 1$ ist

$$\kappa c \sum_{\lambda=0}^{k-1} \frac{\sigma^\lambda |t|^{\frac{\bar{r}+j+\lambda}{k}-1}}{\left| \Gamma\left(\frac{r+j+\lambda}{k}\right) \right|} < L |t|^{\frac{\bar{r}+j}{k}} < L |t|^{\frac{\bar{r}+j}{k}} e^{\sigma^k |t|},$$

er ist

$$\begin{aligned} \kappa c \sum_{\lambda=k}^{\infty} \frac{\sigma^\lambda |t|^{\frac{\bar{r}+j+\lambda}{k}-1}}{\left| \Gamma\left(\frac{r+j+\lambda}{k}\right) \right|} &= \kappa c \sigma^k |t|^{\frac{\bar{r}+j}{k}} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(\sigma |t|^{\frac{1}{k}})^\lambda}{\left| \Gamma\left(\frac{r+j+\lambda}{k} + 1\right) \right|} \\ &< \kappa C c \sigma^k |t|^{\frac{\bar{r}+j}{k}} E_{\frac{1}{k}}(\sigma |t|^{\frac{1}{k}}) < L' |t|^{\frac{\bar{r}+j}{k}} e^{\sigma^k |t|}; \end{aligned}$$

haben wir für $|t| > 1$

$$|\mathfrak{M}_\alpha(t)| < \mathfrak{M} |t|^{\frac{\bar{r}+j}{k}} e^{\sigma^k |t|}.$$

Wie in § 3 sei $\mathfrak{S}$ ein Sektor, der von zwei von $t=0$ nach $t=\infty$ endenden Geraden begrenzt wird und die Punkte $-a_1, a_2 - a_1, \dots, a_m - a_1$ im Innern noch auf dem Rande enthält. Im Sektor $\mathfrak{S}$ ist

$$|w_\alpha(t)| < C e^{h|t|} \quad (\alpha = 1, \dots, m),$$

in $h > \frac{1}{\sigma^k}$ und C hinreichend groß ist²⁰⁾. Nach früherer Schlußweise suchen wir nur zu zeigen, daß die Annahme, es sei $|w_\alpha(t)| = C e^{h|t|}$ $\alpha = \alpha', t = t'$ in $\mathfrak{S}$ ($|t'| = R'$), $|w_\alpha(t)| \leq C e^{h|t|}$ für $\alpha = 1, \dots, m$ $|t| \leq R'$ in $\mathfrak{S}$, auf einen Widerspruch führt.

Nach (C) ist für $\alpha = \alpha', t = t'$

$$\begin{aligned} |t - a_\alpha + a_1| \cdot |w_\alpha(t)| &\leq \sum_{\beta=1}^m |\mathfrak{F}_{\alpha\beta} w_\beta(t)| + \sum_{\beta=1}^m \left| \frac{\mathfrak{G}_{\alpha\beta}^{(0)} w_\beta(t)}{t + a_1} \right| \\ &+ \sum_{\beta=1}^m \left| \int_0^t \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{(t-\tau)^{\frac{\lambda}{k}-1}}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{k}\right)} \frac{1}{\tau + a_1} \mathfrak{G}_{\alpha\beta}^{(\lambda)} w_\beta(\tau) d\tau \right| + |\mathfrak{M}_\alpha(t)| + \left| \frac{\mathfrak{N}_\alpha^{(0)}(t)}{t + a_1} \right| + \\ &+ \left| \int_0^t \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{(t-\tau)^{\frac{\lambda}{k}-1}}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{k}\right)} \frac{\mathfrak{N}_\alpha^{(\lambda)}(\tau)}{\tau + a_1} d\tau \right|. \end{aligned}$$

Es ist $|w_\beta(t)| \leq C e^{h|t|}$, also wie in § 5

$$|\mathfrak{F}_{\alpha\beta} w_\beta(t)| \leq \int_0^{|t|} \mathfrak{A}(|t| - |\tau|)^{\frac{1}{k}-1} e^{\sigma^k(|t| - |\tau|)} \cdot C e^{h|\tau|} d|\tau| < \mathfrak{A} C k |t|^{\frac{1}{k}} e^{h|t|},$$

²⁰⁾ Im Falle $\bar{r} + j < k$ ist $|w_\alpha(t)| < C e^{h|t|}$ für $|t| \geq t_0$, $|w_\alpha(t)| < c |t|^{\frac{\bar{r}+j}{k}-1}$ $|t| < t_0$. Dabei ist $t_0 > 0$ beliebig klein, c hinreichend groß.

$$|\mathfrak{G}_{\alpha\beta}^{(\lambda)} w_\beta(t)| \leq \int_0^{|t|} \mathfrak{B} \sigma^\lambda e^{\sigma^k(|t|-|\tau|)} \cdot C e^{h|\tau|} d|\tau| < \frac{\mathfrak{B} C \sigma^\lambda e^{h|t|}}{h - \sigma^k}$$

und, wenn in $\mathfrak{S}$, $|t + a_1| \geq D > 0$ ist,

$$\left| \frac{\mathfrak{G}_{\alpha\beta}^{(0)} w_\beta(t)}{t + a_1} \right| < \frac{\mathfrak{B} C e^{h|t|}}{D(h - \sigma^k)}.$$

Ferner ist ²¹⁾

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{(t-\tau)^{\frac{\lambda}{k}-1}}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{k}\right)} \frac{1}{\tau + a_1} \mathfrak{G}_{\alpha\beta}^{(\lambda)} w_\beta(\tau) d\tau \right| &\leq \frac{\mathfrak{B} C \sigma^k}{D(h - \sigma^k)} \int_0^{|t|} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{\sigma^\lambda (|t|-|\tau|)^{\frac{\lambda}{k}-1}}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{k}\right)} e^{h|\tau|} d|\tau| \\ &< \frac{\mathfrak{B}' C}{D(h - \sigma^k)} \int_0^{|t|} (|t|-|\tau|)^{\frac{1}{k}-1} e^{\sigma^k(|t|-|\tau|)} e^{h|\tau|} d|\tau| < \frac{k \mathfrak{B}' C |t|^{\frac{1}{k}} e^{h|t|}}{D(h - \sigma^k)}; \\ \left| \frac{\mathfrak{N}_0(t)}{t + a_1} \right| &< \frac{\mathfrak{N} |t|^{\frac{\bar{r}+j}{k}} e^{\sigma^k|t|}}{D}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{(t-\tau)^{\frac{\lambda}{k}-1}}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{k}\right)} \frac{\mathfrak{N}_\alpha^{(\lambda)}(\tau)}{\tau + a_1} d\tau \right| &\leq \frac{\mathfrak{N}}{D} \int_0^{|t|} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{\sigma^\lambda (|t|-|\tau|)^{\frac{\lambda}{k}-1}}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{k}\right)} |\tau|^{\frac{\bar{r}+j}{k}} e^{\sigma^k|\tau|} d|\tau| \\ &< \frac{\mathfrak{N}'}{D} |t|^{\frac{\bar{r}+j}{k}} \int_0^{|t|} (|t|-|\tau|)^{\frac{1}{k}-1} e^{\sigma^k(|t|-|\tau|)} e^{\sigma^k|\tau|} d|\tau| = \frac{k \mathfrak{N}'}{D} |t|^{\frac{\bar{r}+j+1}{k}} e^{\sigma^k|t|}. \end{aligned}$$

Für $\alpha = \alpha'$, $t = t'$ ist also

$$\begin{aligned} |t - a_\alpha + a_j| \cdot C e^{h|t|} &\leq m \mathfrak{A} C k |t|^{\frac{1}{k}} e^{h|t|} + \frac{m \mathfrak{B} C e^{h|t|}}{k - \sigma^k} + \frac{m k \mathfrak{B}' C |t|^{\frac{1}{k}} e^{h|t|}}{D(h - \sigma^k)} \\ &+ \mathfrak{M} |t|^{\frac{\bar{r}+j}{k}} e^{\sigma^k|t|} + \frac{\mathfrak{N}}{D} |t|^{\frac{\bar{r}+j}{k}} e^{\sigma^k|t|} + \frac{k \mathfrak{N}'}{D} |t|^{\frac{\bar{r}+j+k+1}{k}} e^{\sigma^k|t|}. \end{aligned}$$

Die weiteren Schlüsse gestalten sich wie früher in § 3.

Die Integrale

$$\psi_\alpha(x) = \int_0^\infty w_\alpha(t) e^{-\frac{t}{x}} dt \quad (\alpha = 1, \dots, m),$$

welche über die im Sektor $\mathfrak{S}$ verlaufende Gerade $\arg t = \omega$ erstreckt werden,

²¹⁾ Dabei wird von der für alle positiven t gültigen Ungleichung Gebrauch gemacht:

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{\sigma^\lambda t^{\frac{\lambda}{k}-1}}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{k}\right)} < \mathfrak{B} t^{\frac{1}{k}} e^{\sigma^k t}.$$

igen den Gleichungen (C), wenn $\Re\left(\frac{e^{i\omega}}{\xi}\right) > \frac{1}{\varrho^k}$, $|\arg a_1 - \arg \xi| < \frac{\pi}{2}$ ist.

Beweis wird wie im Falle $k=1$ in § 4 geführt.

Wenn $\bar{r} > 0$ und $j=0$ ist, setzen wir

$$\varphi_\alpha(x) = e^{-\vartheta(x)} \psi_\alpha(x) \quad (\alpha = 1, \dots, m);$$

verschwinden die Funktionen $\Re_\alpha(\xi)$, $\Im_\alpha(\xi, \eta)$, $\mathfrak{M}_\alpha(t)$, $\mathfrak{N}_\alpha^{(\lambda)}(t)$, $f_\alpha(t)$, identisch.

Wir haben den Satz:

Die Gleichungen (A) werden durch Reihen

$$\varphi_\alpha(x) = e^{\vartheta(x)} \sum_{n=0}^{\infty} A_{\alpha n} x^{r+n} \quad (\alpha = 1, \dots, m)$$

befriedigt, wo

$$\vartheta(x) = \frac{a}{kx^k} + \frac{a^{(1)}}{(k-1)x^{k-1}} + \dots + \frac{a^{(k-1)}}{x}$$

wo a eine der Zahlen $a_1 \dots a_m$, z. B. $a = a_1$ ist. Sie gehen, wenn man

$$\varphi_\alpha(x) = e^{-\vartheta(x)} (A_{\alpha 0} x^r + A_{\alpha 1} x^{r+1} + \dots + A_{\alpha, j-1} x^{r+j-1} + \psi_\alpha(x)) \quad (\alpha = 1, \dots, m)$$

ersetzt, wo der reelle Teil von $r+j$ positiv ist, in die Gleichungen (B) über, welchen die Integralgleichungen (D) hervorgehen. Diese werden durch Funktionen $w_\alpha(t)$ ($\alpha = 1, \dots, m$) von solcher Beschaffenheit befriedigt,

die in einem Kreis um den Nullpunkt, welcher keine der regulären Stellen $-a_1, a_2 - a_1, \dots, a_m - a_1$ enthält, regulär ist. Die Funktionen $w_\alpha(t)$ lassen sich auf einer Geraden $\arg t = \omega$, welche keine singulären Stellen enthält, regulär fortsetzen und erfüllen auf dieser

Geraden für $|t| \geq t_0 > 0$ die Ungleichungen $|w_\alpha(t)| < C e^{h|t|}$, wo $h > \varrho^{-\frac{1}{k}}$ und C hinreichend groß ist. Nach Einführung der über die Gerade $\arg t = \omega$ verlaufenden Laplaceschen Integrale

$$\psi_\alpha(x) = \int_0^\infty w_\alpha(t) e^{-\frac{t}{x}} dt \quad (\alpha = 1, \dots, m)$$

erhalten die obigen Ausdrücke für die $\varphi_\alpha(x)$ in dem Gebiet

$$\Re\left(\frac{e^{i\omega}}{\xi}\right) > \frac{1}{\varrho^k}, \quad \left|\arg \frac{a}{\xi}\right| < \frac{\pi}{2}$$

Gleichungen (A).

IV. Nichthomogene Gleichungen, $k \geq 1$

§ 9.

Die nichthomogenen Gleichungen

$$(A^*) \quad x^{k+1} \frac{d\varphi_\alpha(x)}{dx} = \sum_{\beta=1}^m P_{\alpha\beta}(x) \varphi_\beta(x) + \int_0^x \sum_{\beta=1}^m Q_{\alpha\beta}(x, y) \varphi_\beta(y) dy + R_\alpha(x),$$

($\alpha = 1, \dots, m$),

wo die Bezeichnungen des vorangehenden Abschnitts beibehalten sind, während

$$R_\alpha(x) = \sum_{\lambda=k}^{\infty} c_\alpha^{(\lambda)} x^{\lambda+2k} \quad (\alpha = 1, \dots, m)$$

in der Umgebung von $x=0$ regulär ist, werden, wenn keine der Größen $a_1, \dots, a_m$ verschwindet, durch Reihen

$$\varphi_\alpha(x) = \sum_{n=k}^{\infty} C_{\alpha n} x^n \quad (\alpha = 1, \dots, m)$$

formal befriedigt. Die Laplacesche Transformation

$$\varphi_\alpha(x) = \int_0^\infty v_\alpha(t) e^{-\frac{t}{x^k}} dt \quad (\alpha = 1, \dots, m)$$

führt unter Einführung der für alle t außer $t=0$ konvergenten Reihen

$$F_{\alpha\beta}(t) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{a_{\alpha\beta}^{(\lambda)} t^{\frac{\lambda}{k}-1}}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{k}\right)},$$

$$G_{\alpha\beta}^{(\lambda)}(t) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{b_{\alpha\beta}^{(\lambda, \mu)} t^{\frac{\mu+1}{k}}}{\Gamma\left(\frac{\mu+1}{k}\right) + 1} \quad (\lambda = 0, 1, 2, \dots),$$

$$H_\alpha(t) = \sum_{\lambda=k}^{\infty} \frac{c_\alpha^{(\lambda)} t^{\frac{\lambda}{k}-1}}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{k}\right)}$$

²²⁾ Die Funktionen $R_\alpha(x)$ können, wenn sie in der Umgebung von $x=0$ regulär sind, durch eine Substitution $\varphi_\alpha(x) = C_{\alpha 0} + C_{\alpha 1}x + \dots + C_{\alpha, k-1}x^{k-1} + \Phi_\alpha(x)$ auf die vorausgesetzte Form gebracht werden.

das System von Integralgleichungen

$$\begin{aligned} (t - a_\alpha) v_\alpha(t) &= \sum_{\beta=1}^m F_{\alpha\beta} v_\beta(t) + \sum_{\beta=1}^m \frac{1}{kt} G_{\alpha\beta}^{(0)} v_\beta(t) \\ &+ \sum_{\beta=1}^m \int_0^t \sum_{\lambda=1}^\infty \frac{(t-\tau)^{\frac{\lambda}{k}-1}}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{k}\right)} \frac{1}{k\tau} G_{\alpha\beta}^{(\lambda)} v_\beta(\tau) d\tau + H_\alpha(t) \end{aligned}$$

($\alpha = 1, \dots, m$),

welches durch die Reihen

$$v_\alpha(t) = \sum_{n=k}^\infty \frac{C_{\alpha n} t^{\frac{n}{k}-1}}{\Gamma\left(\frac{n}{k}\right)} \quad (\alpha = 1, \dots, m)$$

nächst formal befriedigt wird

Wenn die Funktionen $P_{\alpha\beta}(x)$, $Q_{\alpha\beta}(x, y)$, $R_\alpha(x)$ für $|x| < \varrho$ bzw. $|x| < \varrho$, $|y| < \varrho$ regulär sind und $\sigma > \frac{1}{\varrho}$ ist, bestehen Ungleichungen

$$|F_{\alpha\beta}(t)| \leq \mathfrak{A} |t|^{\frac{1}{k}-1} e^{\sigma^k |t|}, \quad |G_{\alpha\beta}^{(\lambda)}(t)| \leq \mathfrak{B} \sigma^\lambda e^{\sigma^k |t|}, \quad |H_\alpha(t)| \leq \mathfrak{C} e^{\sigma^k |t|}.$$

Wir verstehen unter $\mathfrak{R}$ einen Bereich der t -Ebene, welcher aus Kreistoren vom Mittelpunkt $t=0$ und von endlichen Radien besteht und ganze Umgebung des Nullpunktes ausfüllt, die Punkte $a_1, \dots, a_m$ aber der im Innern noch auf dem Rande enthält. In $\mathfrak{R}$ bestehen Ungleichungen

$$|F_{\alpha\beta}(t)| \leq \mathfrak{F} |t|^{\frac{1}{k}-1}, \quad |G_{\alpha\beta}^{(\lambda)}(t)| \leq \mathfrak{G} \sigma^\lambda |t|^{\frac{1}{k}}, \quad |H_\alpha(t)| \leq \mathfrak{H},$$

$\mathfrak{F}, \mathfrak{G}, \mathfrak{H}$ Konstante sind, und $|t - a_\alpha| \geq D > 0$.

Wir lösen die Integralgleichungen (J^*) durch aufeinanderfolgende Näherungen, indem wir setzen:

$$(t - a_\alpha) v_\alpha(t) = H_\alpha(t),$$

$$\begin{aligned} (t - a_\alpha) v_\alpha^{(\nu)}(t) &= \sum_{\beta=1}^m F_{\alpha\beta} v_\beta^{(\nu-1)}(t) + \sum_{\beta=1}^m \frac{1}{kt} G_{\alpha\beta}^{(0)} v_\beta^{(\nu-1)}(t) \\ &+ \sum_{\beta=1}^m \int_0^t \sum_{\lambda=1}^\infty \frac{(t-\tau)^{\frac{\lambda}{k}-1}}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{k}\right)} \frac{1}{k\tau} G_{\alpha\beta}^{(\lambda)} v_\beta^{(\nu-1)}(\tau) d\tau \quad (\nu = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

nächst ist in $\mathfrak{R}$

$$|v_\alpha^{(0)}(t)| \leq \mathfrak{C}_0, \quad \mathfrak{C}_0 = \frac{\mathfrak{H}}{D}.$$

unter der Annahme

$$|v_\alpha^{(\nu-1)}(t)| \leq \mathfrak{C}_{\nu-1} |t|^{\frac{\nu-1}{k}}.$$

haben wir in $\Re$

$$\begin{aligned}
 |F_{\alpha\beta} v_{\beta}^{(\nu-1)}(t)| &\leq \mathfrak{F} \mathfrak{C}_{\nu-1} \int_0^{|t|} (|t| - |\tau|)^{\frac{1}{k}-1} |\tau|^{\frac{\nu-1}{k}} d|\tau| \\
 &= \mathfrak{F} \mathfrak{C}_{\nu-1} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{k}\right) \Gamma\left(\frac{\nu-1}{k} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{k} + 1\right)} \cdot |t|^{\frac{\nu}{k}}, \\
 |G_{\alpha\beta}^{(\lambda)} v_{\beta}^{(\nu-1)}(t)| &\leq \mathfrak{G} \sigma^{\lambda} \mathfrak{C}_{\nu-1} \int_0^{|t|} (|t| - |\tau|)^{\frac{1}{k}-1} |\tau|^{\frac{\nu-1}{k}} d|\tau| \\
 &\leq \mathfrak{G} \sigma^{\lambda} \mathfrak{C}_{\nu-1} |t|^{\frac{1}{k}} \int_0^{|t|} |\tau|^{\frac{\nu-1}{k}} d|\tau| \leq \frac{k \mathfrak{G} \sigma^{\lambda} \mathfrak{C}_{\nu-1}}{\nu-1} \cdot |t|^{\frac{\nu}{k}+1}, \\
 \left| \frac{1}{k t} G_{\alpha\beta}^{(0)} v_{\beta}^{(\nu-1)}(t) \right| &\leq \frac{\mathfrak{G} \mathfrak{C}_{\nu-1}}{\nu-1} \cdot |t|^{\frac{\nu}{k}}, \\
 \left| \int_0^t \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{(t-\tau)^{\frac{\lambda}{k}-1}}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{k}\right)} - \frac{1}{k\tau} G_{\alpha\beta}^{(\lambda)} v_{\beta}^{(\nu-1)}(\tau) d\tau \right| \\
 &\leq \frac{\mathfrak{G} \mathfrak{C}_{\nu-1}}{\nu-1} \int_0^{|t|} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \sigma^{\lambda} \frac{(|t| - |\tau|)^{\frac{\lambda}{k}-1}}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{k}\right)} |\tau|^{\frac{\nu}{k}} d|\tau| \\
 &\leq \frac{\mathfrak{G} \mathfrak{C}_{\nu-1}}{\nu-1} |t|^{\frac{\nu}{k}} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \sigma^{\lambda} \int_0^{|t|} \frac{(|t| - |\tau|)^{\frac{\lambda}{k}-1}}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{k}\right)} d|\tau| = \frac{\mathfrak{G} \mathfrak{C}_{\nu-1}}{\nu-1} |t|^{\frac{\nu}{k}} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{\sigma^{\lambda} |t|^{\frac{\lambda}{k}}}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{k} + 1\right)},
 \end{aligned}$$

daher ist, wenn in $\Re$ $|t| \leq r$ ist,

$$\begin{aligned}
 |v_{\alpha}^{(\nu)}(t)| &\leq \mathfrak{C}_{\nu} |t|^{\frac{\nu}{k}}, \\
 \frac{\mathfrak{C}_{\nu}}{\mathfrak{C}_{\nu-1}} &\leq \frac{m \mathfrak{F} \Gamma\left(\frac{1}{k}\right) \Gamma\left(\frac{\nu-1}{k} + 1\right)}{D \Gamma\left(\frac{\nu}{k} + 1\right)} + \frac{m \mathfrak{G}}{D(\nu-1)} + \frac{m \mathfrak{G}}{D(\nu-1)} E \frac{1}{k} \left(\sigma r^{\frac{1}{k}}\right).
 \end{aligned}$$

Hiernach ist

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{\mathfrak{C}_{\nu}}{\mathfrak{C}_{\nu-1}} = 0;$$

die Reihen

$$v_{\alpha}(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} v_{\alpha}^{(\nu)}(t) \quad (\alpha = 1, \dots, m)$$

sind in $\Re$ absolut und gleichmäßig konvergent, sie stellen in $\Re$ reguläre Funktionen dar und genügen den Integralgleichungen (J^*).

Der Sektor $\mathfrak{S}$, der von zwei von $t=0$ ins Unendliche gehenden Strahlen begrenzt wird, enthalte weder im Innern noch auf dem Rande eine der Stellen $\alpha_1, \dots, \alpha_m$. Im Sektor $\mathfrak{S}$ ist $|v_\alpha(t)| < C e^{h|t|}$ ($\alpha=1, \dots, m$), $h > \frac{1}{\rho^k}$ und C hinreichend groß ist.

Wir brauchen, wenn wir die frühere Schlußweise anwenden, nur zu zeigen, daß die Annahme, es sei $|v_\alpha(t)| = C e^{h|t|}$ für $\alpha = \alpha'$, $t = t' = R'$ hinreichend groß), $|v_\alpha(t)| \leq C e^{h|t|}$ für $\alpha = 1, \dots, m$ und $\leq R'$, auf einen Widerspruch führt. Unter dieser Annahme ist wie § 8

$$|F_{\alpha\beta} v_\beta(t)| \leq \mathfrak{A} C k |t|^{\frac{1}{k}} e^{h|t|},$$

$$\left| \frac{1}{k t} G_{\alpha\beta}^{(0)} v_\beta(t) \right| \leq \frac{\mathfrak{B} C e^{h|t|}}{k},$$

$$\left| \int_0^t \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{(t-\tau)^{\frac{\lambda}{k}-1}}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{k}\right)} \frac{1}{k\tau} G_{\alpha\beta}^{(\lambda)} v_\beta(\tau) d\tau \right| \leq \frac{\mathfrak{B}' C e^{h|t|}}{k(h-\sigma^k)}.$$

es (J*) folgt also für $\alpha = \alpha'$, $t = t'$

$$\begin{aligned} t - \alpha_n | \cdot C e^{h|t|} &\leq m \mathfrak{A} C k |t|^{\frac{1}{k}} e^{h|t|} + \frac{m \mathfrak{B} C e^{h|t|}}{k(h-\sigma^k)} \\ &+ \frac{m \mathfrak{B}' C e^{h|t|}}{k(h-\sigma^k)^2} + \mathfrak{C} e^{\sigma^k |t|}. \end{aligned}$$

Fälle $k=1$ wird das erste Glied der rechten Seite dieser Ungleichung durch $\frac{m \mathfrak{A} C e^{h|t|}}{h-\sigma}$ ersetzt.

Die Integrale

$$\varphi_\alpha(x) = \int_0^\infty v_\alpha(t) e^{-\frac{t}{x^k}} dt \quad (\alpha = 1, \dots, m),$$

welche über die durch keine der Stellen $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ gehende Gerade $g: t = \omega + 2q\pi$ ($q=0, 1, \dots, k-1$) erstreckt werden, sind in dem Gebiet

$$\Re\left(\frac{e^{i\omega}}{x^k}\right) > \frac{1}{\rho^k}, \quad \frac{(2q-\frac{1}{2})\pi + \omega}{k} < \arg x < \frac{(2q+\frac{1}{2})\pi + \omega}{k} \quad (23)$$

konvergent und genügen den Gleichungen (A*).

Es gilt der Satz:

Die nichtthomogenen Gleichungen (A*), in welchen $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ von Null verschieden sind, werden durch Potenzreihen

²³⁾ Vgl. Jahresber. d. D. Math.-Ver. 25 (1916), S. 304f.

$$\varphi_\alpha(x) = \sum_{n=k}^{\infty} C_{\alpha n} x^n \quad (\alpha = 1, \dots, m)$$

formal befriedigt. Den Integralgleichungen (J^*) genügen Funktionen $v_\alpha(t)$, welche sich in einem von den singulären Stellen $a_1, \dots, a_m$ freien Kreise um $t=0$ in die konvergenten Reihen

$$v_\alpha(t) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{C_{\alpha n} t^{\frac{n}{k}-1}}{\Gamma\left(\frac{n}{k}\right)} \quad (\alpha = 1, \dots, m)$$

entwickeln lassen und auf einer durch keine der Stellen $a_1, \dots, a_m$ gehenden Geraden $\arg t = \omega$ Ungleichungen

$$|v_\alpha(t)| < C e^{h|t|} \quad (\alpha = 1, \dots, m)$$

erfüllen, wo $h > \frac{1}{e^k}$ ²⁴⁾ und C hinreichend groß ist. Die Gleichungen (A^*) werden durch die Integrale

$$\varphi_\alpha(x) = \int_0^\infty v_\alpha(t) e^{-\frac{t}{x^k}} dt \quad (\alpha = 1, \dots, m)$$

befriedigt, welche, wenn auf dem geradlinigen Integrationsweg $\arg t = \omega + 2q\pi$ ($q = 0, 1, \dots, k-1$) angenommen wird, in dem Gebiet

$$\Re\left(\frac{e^{i\omega}}{x^k}\right) > \frac{1}{e^k}, \quad \frac{(2q - \frac{1}{2})\pi + \omega}{k} < \arg x < \frac{(2q + \frac{1}{2})\pi + \omega}{k}$$

konvergieren.

V. Homogene und nichthomogene Gleichungen, $k=0$.

§ 10.

Indem wir $k=0$ annehmen, betrachten wir die Gleichungen

$$(A_0) \quad x \frac{d\varphi_\alpha(x)}{dx} = \sum_{\beta=1}^m P_{\alpha\beta}(x) \varphi_\beta(x) + \int_0^x \sum_{\beta=1}^m Q_{\alpha\beta}(x, y) \varphi_\beta(y) dy \quad (\alpha = 1, \dots, m),$$

wo $P_{\alpha\beta}(x)$ und $Q_{\alpha\beta}(x, y)$ die in der Einleitung angegebene Bedeutung haben. Zwischen den Größen $a_1, \dots, a_m$ möge keine von Null verschiedene ganzzahlige Differenz bestehen²⁵⁾. Es sei, wenn der reelle Teil

²⁴⁾ Die Funktionen $P_{\alpha\beta}(x)$, $Q_{\alpha\beta}(x, y)$, $R_\alpha(x)$ sind für $|x| < e$ bzw. $|x| < e$, $|y| < e$ regulär.

²⁵⁾ Die Größen $a_1, \dots, a_m$ brauchen nicht sämtlich verschieden zu sein. Der benutzte Satz über die Lösungen der Differentialgleichungen für die $\varphi_\alpha^{(0)}(x)$ ist ebenso wie die weiteren Schlüsse gültig, wenn die Determinante $|a_{\alpha\beta}^{(0)} - s\delta_{\alpha\beta}|$ ($\alpha, \beta = 1, \dots, m$) die Elementarteiler $s - a_1, \dots, s - a_m$ besitzt. Vgl. Math. Ann. 39 (1891), S. 391.

von α_α mit $\bar{\alpha}_\alpha$ bezeichnet wird, $\bar{\alpha}_1 \geq \bar{\alpha}_2 \geq \dots \geq \bar{\alpha}_m$. Es sei a eine der Zahlen $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ und $\bar{\alpha}_a > -1$. Wir schreiben die Systeme von Differentialgleichungen an:

$$x \frac{d\varphi_\alpha^{(0)}(x)}{dx} = \sum_{\beta=1}^m P_{\alpha\beta}(x) \varphi_\beta^{(0)}(x) \quad (\alpha = 1, \dots, m);$$

$$x \frac{d\varphi_\alpha^{(\nu)}(x)}{dx} = \sum_{\beta=1}^m P_{\alpha\beta}(x) \varphi_\beta^{(\nu)}(x) + \Phi_\alpha^{(\nu)}(x)$$

$$\Phi_\alpha^{(\nu)}(x) = \int_0^x \sum_{\beta=1}^m Q_{\alpha\beta}(x, y) \varphi_\beta^{(\nu-1)}(y) dy \quad (\alpha = 1, \dots, m; \nu = 1, 2, \dots).$$

Die Differentialgleichungen für die $\varphi_\alpha^{(0)}(x)$ besitzen die m zu $\beta = 1, \dots, m$ gehörigen linear unabhängigen Lösungen

$$x^{\alpha_\beta} p_{\alpha\beta}(x) \quad (\alpha = 1, \dots, m),$$

wobei $p_{\alpha\beta}(x)$ für $|x| < \varrho$ regulär ist. Wir setzen

$$\varphi_\alpha^{(0)}(x) = x^a p_\alpha(x) \quad (\alpha = 1, \dots, m),$$

wobei $p_\alpha(x)$ für $|x| < \varrho$ regulär ist. Unter der Voraussetzung, daß $\varphi_\alpha^{(\nu-1)}(x)$ gleich dem Produkt aus $x^{a+\nu-1}$ und einer für $|x| < \varrho$ regulären Funktion ist, ist $\Phi_\alpha^{(\nu)}(x)$ das Produkt aus $x^{a+\nu}$ und einer für $|x| < \varrho$ regulären Funktion. Dann wird das System für die $\varphi_\alpha^{(\nu)}(x)$ durch mit $x^{a+\nu}$ multiplizierte reguläre Funktionen befriedigt. Eine solche Lösung erhält man, wenn $\nu > \bar{\alpha}_1 - \bar{\alpha}$, also $\bar{\alpha} - \bar{\alpha}_1 + \nu > 0$ und demnach auch $\bar{\alpha} - \bar{\alpha}_\beta + \nu > 0$ ($\beta = 1, \dots, m$) ist, in der Form

$$\varphi_\alpha^{(\nu)}(x) = \sum_{\beta=1}^m x^{\alpha_\beta} p_{\alpha\beta}(x) \int_0^x x^{-\alpha_\beta-1} \sum_{\gamma=1}^m q_{\gamma\beta}(x) \Phi_\gamma^{(\nu)}(x) dx \quad (\alpha = 1, \dots, m);$$

dabei ist

$$p_{\alpha_1} q_{\gamma_1} + \dots + p_{\alpha_m} q_{\gamma_m} = \delta_{\alpha\gamma} \quad (\alpha, \gamma = 1, \dots, m)$$

und $|q_{\gamma\beta}(x)|$ für $|x| < \varrho$ regulär. Es sei für $|x| \leq \varrho_0$, $|y| \leq \varrho_0$, $\varrho_0 < \varrho$

$$|p_{\alpha\beta}(x)| \leq M, \quad |q_{\alpha\beta}(x)| \leq N, \quad |Q_{\alpha\beta}(x, y)| \leq Q;$$

wenn $\arg x$ zwischen endlichen Schranken bleibt, ist

$$|x^{\alpha_\beta}| \leq \kappa |x|^{\bar{\alpha}_\beta}, \quad |x^{-\alpha_\beta}| \leq \kappa' |x|^{-\bar{\alpha}_\beta}.$$

Wenn für $|x| \leq \varrho_0$

$$|\varphi_\alpha^{(\nu-1)}(x)| \leq \mathfrak{G}_{\nu-1} |x|^{\bar{\alpha} + \nu - 1}$$

ist, hat man

$$|\Phi_a^{(\nu)}(x)| \leq \frac{m Q \mathfrak{C}_{\nu-1} |x|^{\bar{a}+\nu}}{\bar{a}+\nu},$$

$$|\varphi_a^{(\nu)}(x)| \leq \mathfrak{C}_{\nu} |x|^{\bar{a}+\nu}, \quad \frac{\mathfrak{C}_{\nu}}{\mathfrak{C}_{\nu-1}} = \frac{m^2 \kappa \kappa' M N Q}{\nu(\bar{a}+\nu)},$$

so daß die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} x^{-a} \varphi_a^{(\nu)}(x)$$

für $|x| < \varrho$ absolut und gleichmäßig konvergent ist. Die Gleichungen (A_0) haben also eine Lösung

$$\varphi_a(x) = x^a \mathfrak{P}_a(x) \quad (\alpha = 1, \dots, m),$$

wo $\mathfrak{P}_a(x)$ für $|x| < \varrho$ regulär ist.

Bei der Betrachtung der nichthomogenen Gleichungen

$$(A_0^*) \quad x \frac{d\varphi_a(x)}{dx} = \sum_{\beta=1}^m P_{\alpha\beta}(x) \varphi_{\beta}(x) + \int_0^x \sum_{\beta=1}^m Q_{\alpha\beta}(x, y) \varphi_{\beta}(y) dy + R_{\alpha}(x) \quad (\alpha = 1, \dots, m),$$

worin

$$R_{\alpha}(x) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} c_{\alpha}^{(\lambda)} x^{\lambda}$$

für $|x| < \varrho$ konvergent ist, fügen wir zu den bisherigen Voraussetzungen über $a_1, \dots, a_m$ die weitere hinzu, daß keine der Größen $a_1, \dots, a_m$ gleich Null oder gleich einer ganzen positiven Zahl ist. Wir ersetzen die Gleichungen (A_0^*) durch die Kette von Differentialgleichungssystemen:

$$x \frac{d\varphi_a^{(0)}}{dx} = \sum_{\beta=1}^m P_{\alpha\beta}(x) \varphi_{\beta}^{(0)}(x) + R_{\alpha}(x) \quad (\alpha = 1, \dots, m);$$

$$x \frac{d\varphi_a^{(\nu)}}{dx} = \sum_{\beta=1}^m P_{\alpha\beta}(x) \varphi_{\beta}^{(\nu)}(x) + \Phi_a^{(\nu)}(x),$$

$$\Phi_a^{(\nu)}(x) = \int_0^x \sum_{\beta=1}^m Q_{\alpha\beta}(x, y) \varphi_{\beta}^{(\nu-1)}(y) dy \quad (\alpha = 1, \dots, m; \nu = 1, 2, \dots).$$

Die Differentialgleichungen für die $\varphi_a^{(0)}(x)$ werden durch für $|x| < \varrho$ reguläre Funktionen befriedigt. Unter der Annahme, daß $\varphi_a^{(\nu-1)}(x)$ gleich einer mit $x^{\nu-1}$ multiplizierten regulären Funktion ist, ergibt sich für $\Phi_a^{(\nu)}(x)$ eine mit x^{ν} multiplizierte reguläre Funktion. Die Differentialgleichungen für die $\varphi_a^{(\nu)}(x)$ werden durch mit x^{ν} multiplizierte reguläre Funktionen befriedigt. Eine solche Lösung erhält man, wenn $\nu > \bar{a}_1$, also $-\bar{a}_{\beta} + \nu > 0$ ($\beta = 1, \dots, m$) ist, in der Form

$$\varphi_{\alpha}^{(\nu)}(x) = \sum_{\beta=1}^m x^{a_{\beta}} p_{\alpha\beta}(x) \int_0^x x^{-a_{\beta}-1} \sum_{\gamma=1}^m q_{\gamma\beta}(x) \Phi_{\gamma}^{(\nu)}(x) dx \quad (\alpha = 1, \dots, m).$$

Venn für $|x| \leq \varrho_0 < \varrho$

$$|\varphi_{\alpha}^{(\nu-1)}(x)| \leq \mathfrak{C}_{\nu-1} |x|^{\nu-1}$$

st, hat man

$$|\varphi_{\alpha}^{(\nu)}(x)| \leq \mathfrak{C}_{\nu} |x|^{\nu}, \quad \frac{\mathfrak{C}_{\nu}}{\mathfrak{C}_{\nu-1}} = \frac{m^3 \kappa \kappa' M N Q}{\nu(\nu - \bar{a}_1)}.$$

Die für $|x| \leq \varrho_0$ absolut und gleichmäßig konvergenten Reihen

$$\varphi_{\alpha}(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi_{\alpha}^{(\nu)}(x)$$

stellen Funktionen dar, welche für $|x| < \varrho$ regulär sind und den Differentialgleichungen (A_0^*) genügen.

Zwischen den Größen $a_1, \dots, a_m$ bestehen keine von Null verschiedene ganzzahlige Differenz. Die homogenen Gleichungen (A_0) haben, wenn a eine der Zahlen $a_1, \dots, a_m$ mit einem reellen Teil größer als -1 ist, eine Lösung

$$\varphi_{\alpha}(x) = x^a p_{\alpha}(x) \quad (\alpha = 1, \dots, m),$$

wo $p_{\alpha}(x)$ für $|x| < \varrho$ regulär ist. Die nichthomogenen Gleichungen (A_0^*) werden, wenn keine der Größen $a_1, \dots, a_m$ gleich Null oder gleich einer positiven ganzen Zahl ist, durch Funktionen $\varphi_{\alpha}(x)$ befriedigt, welche für $|x| < \varrho$ regulär sind.

(Eingegangen am 29. Oktober 1918.)

Der Wertvorrat einer Bilinearform.

Von

Felix Hausdorff in Greifswald.

Herr Toeplitz hat in dieser Zeitschrift kürzlich gezeigt¹⁾, daß der Wertvorrat W einer Bilinearform, als Punktmenge in der komplexen Zahlenebene, außen von einer konvexen Kurve begrenzt ist, aber die Frage offen gelassen, ob er das ganze Innere dieser Kurve erfüllt. Es ist nun sehr einfach zu zeigen, daß diese Frage zu bejahen, nämlich W selbst eine konvexe Menge ist.

Wenn

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}, \quad C^* = \begin{pmatrix} \bar{c}_{11} & \dots & \bar{c}_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \bar{c}_{1n} & \dots & \bar{c}_{nn} \end{pmatrix}$$

eine n -reihige Matrix und ihre begleitende (konjugiert-transponierte) Matrix C^* bedeuten, so sind durch

$$A = \frac{1}{2}(C + C^*), \quad B = \frac{1}{2i}(C - C^*)$$

oder umgekehrt

$$C = A + iB, \quad C^* = A - iB$$

zwei Hermitesche Matrizen A, B , die *Komponenten* von C , definiert. Eine lineare Substitution (nichtverschwindender Determinante) mit der Matrix P , die C in

$$\mathfrak{C} = PCP^*$$

überführt, führt gleichzeitig C^* in $\mathfrak{C}^*$ und die Komponenten A, B in die Komponenten $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ über.

Der Wertvorrat W von C ist, nach Herrn Toeplitz, die Menge der komplexen Zahlen w , welche die Form

¹⁾ O. Toeplitz, Das algebraische Analogon zu einem Satze von Fejér, Math. Zeitschrift 2 (1918), S. 187–197.

$$C(x, \bar{x}) = \sum_{\alpha, \beta} c_{\alpha\beta} x_{\alpha} \bar{x}_{\beta} = w$$

durchläuft, wenn die komplexen Veränderlichen $x_1, x_2, \dots, x_n$ der Bedingung

$$1) \quad E(x, \bar{x}) = \sum_{\alpha} x_{\alpha} \bar{x}_{\alpha} = 1$$

unterworfen werden. Zerlegen wir C in seine Komponenten, so ist W die Menge der reellen Wertpaare (u, v) oder der Punkte mit rechtwinkligen Koordinaten u, v , die ein Paar Hermitescher Formen

$$A(x, \bar{x}) = u, \quad B(x, \bar{x}) = v$$

unter der Bedingung (1) durchläuft.

Durch eine unitäre Substitution ($PP^* = E$), die offenbar den Wertvorrat von C nicht ändert, können wir die Hermitesche Matrix A in eine Diagonalmatrix überführen oder also von vornherein

$$A(x, \bar{x}) = \sum_{\alpha} a_{\alpha} x_{\alpha} \bar{x}_{\alpha}$$

als Diagonalform mit den Eigenwerten $a_1, a_2, \dots, a_n$ annehmen. Sei dann u_0 ein Wert, den $A(x, \bar{x})$ unter der Bedingung (1) annimmt, der also zwischen dem kleinsten und größten Eigenwert liegt; geometrisch gesprochen: die zur v -Achse parallele Gerade $u = u_0$ schneide die Menge W .

Es kommt nun einfach darauf an, zu zeigen, daß die Menge M der Wertsysteme $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, für die gleichzeitig

$$A(x, \bar{x}) = u_0, \quad E(x, \bar{x}) = 1$$

gilt, *zusammenhängend* ist. In der Tat lassen sich zwei solche Wertsysteme oder Punkte x, y (im Raume von n komplexen oder $2n$ reellen Dimensionen) folgendermaßen durch eine in M verlaufende stetige Kurve verbinden, wobei mit $|x_{\alpha}| = \xi_{\alpha}$, $|y_{\alpha}| = \eta_{\alpha}$

$$x_{\alpha} = \xi_{\alpha} e^{i\varphi_{\alpha}}, \quad y_{\alpha} = \eta_{\alpha} e^{i\psi_{\alpha}}$$

gesetzt sei und für jedes der drei Kurvenstücke der Parameter t das Intervall $0 \leq t \leq 1$ durchläuft:

Durch

$$z_{\alpha} = \xi_{\alpha} e^{i(1-t)\varphi_{\alpha}}$$

wird x mit ξ verbunden

Durch

$$z_{\alpha} = \sqrt{(1-t)\xi_{\alpha}^2 + t\eta_{\alpha}^2} \geq 0$$

wird ξ mit η verbunden.

Durch

$$z_\alpha = \eta_\alpha e^{it\psi_\alpha}$$

wird η mit y verbunden.

Auf allen drei Kurvenbögen ist

$$A(z, \bar{z}) = A(\xi, \bar{\xi}) = A(\eta, \bar{\eta}) = A(x, \bar{x}) = A(y, \bar{y}) = u_0$$

und ebenso $E(z, \bar{z}) = 1$; die Kurve liegt in M .

Überdies ist M beschränkt und abgeschlossen. Die Werte, die $v = B(x, \bar{x})$ als stetige Funktion von x in M annimmt, bilden also eine zusammenhängende, beschränkte, abgeschlossene Menge, d. h. ein Intervall; die Menge W wird von jeder sie treffenden Geraden $u = u_0$ in einer Strecke (ev. in einem einzigen Punkte) geschnitten. Auf die Matrix $e^{i\varphi} C$ angewandt, deren Wertvorrat aus W durch eine Drehung entsteht, besagt dies, daß die Menge W von jeder sie treffenden Geraden beliebiger Richtung in einer Strecke geschnitten wird: W ist konvex.

Auf mehr als zwei Hermitesche Formen

$$u_1 = A_1(x, \bar{x}), u_2 = A_2(x, \bar{x}), \dots, u_r = A_r(x, \bar{x})$$

läßt sich das Verfahren nicht übertragen; die Menge W der Punkte $(u_1, u_2, \dots, u_r)$, die unter der Bedingung (1) erhalten werden, braucht nicht mehr konvex zu sein. Für $r = 3$ kann man noch wie Herr Toeplitz (a. a. O., S. 194) auf Grund unseres zweidimensionalen Resultats beweisen, daß W von jeder Stützebene in einer konvexen ebenen Menge geschnitten, also außen von einer konvexen Fläche begrenzt wird; für $r > 3$ ist auch dies nicht mehr allgemein richtig.

(Eingegangen am 28. November 1918.)

Nachträgliche Bemerkung

u meiner Arbeit „Über die asymptotische Verteilung der Ziffern in Dezimalbrüchen“, Math. Zeitschrift 2 (1918), S. 306—311.

Soeben bemerke ich, daß schon Herr G. Faber im § 4 seiner zweiten Abhandlung „Über stetige Funktionen“, Math. Annalen 69 (1910), S. 372 bis 443, den Borelschen Satz, allerdings nur für dyadische Bruchentwicklungen, mit derselben Methode beweist, die ich in nur leicht verallgemeinerter Weise auf Dezimalbrüche angewandt habe. Die Fabersche Arbeit ist mir leider entgangen, als ich nach Fertigstellung meines Beweises in der Literatur nach früheren Beweisen des Satzes suchte.

Wickersdorf, den 13. Februar 1919.

H. Rademacher.

(Eingegangen am 15. Februar 1919.)

